



TITLE:

高周波焼入の研究( Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

菅沼, 春幸

---

CITATION:

菅沼, 春幸. 高周波焼入の研究. 京都大学, 1962, 工学博士

ISSUE DATE:

1962-03-31

URL:

<https://doi.org/10.14989/161936>

RIGHT:

杯  
全

# 高周波焼入の研究

昭和 36 年 9 月

菅 沼 春 幸

OC

061

29

気系

## 目 次

緒 言	1
第1章 誘導加熱に於ける基礎式	5
1.1 磁界の強さ及び電流密度	5
1.2 インピーダンス	8
1.3 電力密度及び等価浸透深度	9
1.4 計 算 例	10
1.5 結 び	55
第2章 電流変成器	56
2.1 空心電流変成器の等価回路	57
2.2 空心電流変成器の能率	60
2.3 磁心入電流変成器	64
2.4 リ ー ド 線	65
2.5 高周波発電機を高周波電源とせる場合	66
第3章 真空管発振器	71
3.1 自励発振回路	72
3.2 発振電圧	77
3.3 結 び	83
第4章 誘導加熱に於ける熱伝導	85
4.1 円柱材の加熱	86

4.2	平板材の加熱	93
4.3	高周波焼入に於ける加熱	100
4.4	結 び	112
第5章	高周波焼入に於ける冷却	114
5.1	冷却に関する仮定	114
5.2	初期に於ける冷却式	116
5.3	高周波焼入に於ける冷却	117
5.4	結 び	124
第6章	実 施 例	127
	結 言	137
	参 考 文 献	139

## 緒 言

金属の誘導加熱は、1916年 *Northrup* 博士によつて実験的に基礎づけられ、主に熔解を目的として工業的に第1歩を印し、更に1936年頃 *Ajax Electrothermic* 社に於てクランク軸の軸受部に所謂高周波表面焼入が応用されたのを契機としてその応用範囲が広く認識されはじめた。戦後は高周波熱処理に関する冶金学的研究の成果と、プロセスによつて量及び質の飛躍的向上をなしつつある工業上の要求と相俟つて益々応用分野を広め、最近では単に金属の熔解、熱処理にとどまらず鋼の簡易分析用、或は半導体の精製、単結晶の引上げ等にまで応用されるに至つた。

これに使用される周波数は商用周波から数Mcに至る広範囲に及び、その電源は配電網に直結された一部を除いて火花発振器、高周波発電機、真空管発振器、その他の周波数変換機等の多岐に亘っている。而してこれらの大部分は電気通信を目的として発達し、その後、に於て誘導加熱用に改造されたものである。従つて電気通信の電源設備が同時に誘導加熱の発達を裏付け、或は先導したものであつて、例えば最も原始的である放電間隙式火花発振器は鳥養利三郎博士等の考案による改良によつて所謂鳥養式瞬滅火花発振器として戦後の日本に於ける高周波焼入分野に偉大なる足跡を残し、又電動式高周波発電機は無線通信の初期に於ける役割を果たしてその方面に於ては現在全く無視された存在となつたが、種々の改造が施され、特に *Homopolar* より *Heteropolar Inductor Alternator* として界磁の時定数が著しく減少された結果、制御特性が良好となり今日誘導加熱の広範囲な分野に使用されている。更に真空管発振器については放送事業の強大化に伴い、安定せる大型管が製作され、これらが誘導加熱分野に流用されたが最近に至つては特に工業用真空管が開発されつつある気運にある。而して斯の如き広範囲な電源設備を目的により適当に選択駆使する事により、小は数mm 直径程度の部品の焼入、焼鈍から大は10ton の熔解

炉に至るまで、又電源容量的には数 $\times 100$  Wより数 $\times 1000$  KWの装置が設備されるに至った。

誘導加熱の特長としては大電力の集中が可能な事、局部加熱の出来る事、及び環境或は雰囲気制御の容易性等が挙げられるが、これを利用面から見れば熔解、全体均一加熱、表面加熱に大別される。これらについて共通の問題は渦流の滲透深さ、投入電力密度、及びインピーダンス等が基本であって、*N.R. Stansel*; *G. H. Brown*; *R. M. Baker*; 梶養, 岩本; 谷崎; 北村の諸氏等その他多くの人々の著書或は研究報告がなされているが、加熱機構は電氣的と熱的問題が陰陽に影響する為非常に複雑であり、未だ充分なる解析がなされていない。従って誘導加熱応用の実際については経験に頼っている点が多い。

高周波焼入は鋼を誘導加熱して焼入する一般的には表面焼入法の一つ種類であって、鋼部品の必要表面部を表面加熱して冷却する誘導加熱応用の一分野である。高周波焼入の目的は唯単に必要表面を必要層だけ硬化させる事だけの場合もあるし、或は焼入によって生ずる内部応力を利用する事が目的の場合、更にはその両者を必要とする場合等種々であるが、加熱及び冷却時の被加熱体内の温度分布及びその時間的推移は焼入後の硬化層、焼入変形、内部応力、焼割れ等の問題を解決する為の重要な手懸りとなるものである。同時にこの焼入法は他の焼入法に比して加熱時間が極めて短いのが通常であって、被焼入材の加熱時に於ける相変化に関する拡散、結晶粒の成長等焼入組織の冶金学的究明の爲にも温度分布の検討は欠く事の出来ない問題である。

被加熱体の温度分布を求めるには、その熱源である渦流による発生電力密度の分布状況を知る必要がある。而してこの電力密度分布の基礎となる渦流及び磁束の分布或は電気回路としてのインピーダンス等については多くの人々によって計算されているが、鋼の誘導加熱に於てその電力密度分布に特異な性格を与える導磁率及びそのキュリー点を考慮せる解析に關しては必ずしも充分とは云えない。

高周波焼入に使用される加熱コイル（誘導子）は電力の集中を考慮する爲と同時に、加熱コイル自身が焼入冷媒の案内を勤める場合が多く、更に取扱上の点等が考慮されて一般には1～数回巻のコイルであつて、加熱コイルから見た負荷は、

- ⅰ) インピーダンスが非常に小さく
- ⅱ) 空隙の爲に低力率であつて
- ⅲ) 加熱進行と共にインピーダンスは大幅に変化する。

ⅰ)に対しては電流変成器を使用する事によって高インピーダンス負荷として電源に接続されるが、使用周波数が高いと変成器の漏洩磁束の影響が大きくなるので電流変成器を含む負荷はⅱ)に拍車を加えて低力率となる。高周波焼入に適用される周波数は1～500<sup>KC</sup>の範囲であつて、その裡1～10<sup>KC</sup>については高周波発電機(Merger)、それ以上は概ね真空管発振器が使用されるが、自励式真空管発振器又は火花式発振器のやうに発振回路素子として必然的にあるQ値が必要とされる場合には電流変成器自体が発振回路素子の一部として組みまれ、その低力率性を有効に利用出来る。一方高周波発電機或は真空管式でも他励式電力増中型の場合には進相コンデンサによって力率改善が行はれるので低力率素子は設備容量及び効率に影響する。斯様に誘導加熱に於ける被加熱体内の電力密度分布及びその大きさは、その温度分布に支配される導磁率によって左右される面、即ち加熱進行に伴う変化と、加熱進行に伴うインピーダンス変化が加熱コイルより電源側に及ぼす影響について、全体的に検討されなければならない。

一方誘導加熱に於ける温度分布に関しては、京都大学島養利三郎氏岩本国三氏の計算、(電気評論、昭20、12月)、東京工業大学中野義映氏の熱伝算計算式(電学誌78、768、昭33)或はスエーデン国 L. A. Dreyfus 氏の計算等により種々解析されているが、被加熱体内の電力密度分布、即ち熱源の発生域に関しこれが實際上の適用について不明確である。

本研究に於ては、オノ章に於て被加熱体の加熱進行に対応する加

熱コイルよりみたインピーダンス等を創示し、特に電力の等価濃度を明確にして熱伝導問題に關する熱源の発生域に対する有力な基礎付けを行った。次でオ2章に於ては、高周波焼入の場合非常に使用される事が多く、一種の整合装置とも見られる電流変流器について解析し、オ3章に於ては、負荷インピーダンスの変化が高周波出力に大きく影響する自励式真空管発振器の動作を分析し、オ1、オ2章の結果と相俟って、加熱進行に伴う被加熱体内の電力密度を検討する根拠を与えた。

以上オ1章内至オ3章によって予め算定される電力密度の大きさ及びその発生域に従ってオ4章では熱伝導を扱い、特に加熱進行に伴う電力密度の大きさ及び発生域の変化に対応する熱伝導式の取扱を明かにし、又厚さが無限大なる平板を一面より加熱せる場合につき解析を行ない、周波数の影響を検討した。最後にオ5章に於て冷却に於ける熱伝導式を導き高周波焼入の実施例を掲げて結びとした。

これらの研究結果が高周波焼入の實際に利用され、或はその冶金学的研究に益する所があれば幸いである。

尚この研究は林重憲教授の御指導により行ったものである事を記し同教授に深甚なる感謝の意を表する。



# 第1章 誘導加熱に於ける基礎式

高周波焼入の対称は比較的炭素鋼が多く、特殊鋼の場合も特殊なものを除いては、これらを電磁的媒質として見る時、炭素鋼の電見的定数と大差はない。炭素鋼は $700^{\circ}\sim 800^{\circ}\text{C}$ に於て磁気変態を生じ、導磁率はそれ以上の温度で1となり、又 $800^{\circ}\text{C}$ 前後に於て結晶上の相変態がある。これらは何れも吸熱変態であり、更にこれらの変態点附近の温度以上では抵抗の温度係数が相当小になっているという特長がある。

一方誘導加熱による発熱量の密度が加熱表面から内部に向つて略々指数函数的に分布する場合、それによつて生ずる被加熱体内の温度勾配は作用電力、被加熱材の熱的諸定数及び時間に支配されるが表面層附近では概ね熱源の勾配より小さい。

従つて茲に次の如き計算上の仮定を設ける。

i 磁気変態点温度に達する迄は比抵抗は変化するも導磁率は一定とし、それ以上の温度では導磁率は1、比抵抗は一定とする。

ii 前記変態温度以下では被加熱体内の温度勾配を渦流分布に対して無視し、被加熱材の電見的定数は表面温度に於けるそれとする。

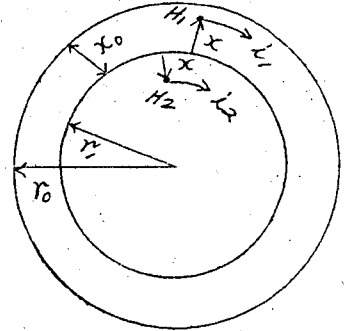
iii 表面層が変態温度に達した場合は被加熱体は2層媒質よりなるものとし、且表面層媒質の導磁率は1、芯部媒質の比抵抗は表面層のそれと等しいものとする。

iv 被加熱体の寸法は適用周波数の所謂渦流の等価滲透深度に対して充分大きく、被加熱体内の渦流は表面から内部に向つて指数函数或は双曲線函数を以て表<sub>わ</sub>せ<sub>わ</sub>るものとする。

## 1.1 磁界の強さ及電流密度

被加熱体を無限長円柱とし、その半径を $r_0$ 、表面層の厚さを $\lambda_0$ 、芯部の半径を $r$ とすると、表面層内及び芯部内の任意半径 $r$ なる点に於ける磁界強度 $H$ 、及び $H/2$ は外表面に於ける磁界強度を $H_0$ として、次式で与えられる。

Fig 1-1



$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{m_0 \rho_0 \cosh m'_0 (r - r_1) + m_1 \rho_0 \sinh m'_0 (r - r_1)}{m_0 \rho_0 \cosh m'_0 (r_0 - r_1) + m_1 \rho_0 \sinh m'_0 (r_0 - r_1)} \sqrt{\frac{r_0}{r}} H_0 \\ H_2 &= \frac{m_0 \rho_0 e^{-m'_1 (r_1 - r)}}{m_0 \rho_0 \cosh m'_0 (r_0 - r_1) + m_1 \rho_0 \sinh m'_0 (r_0 - r_1)} \sqrt{\frac{r_0}{r}} H_0 \end{aligned} \right\} (1.1)$$

但し  $m'_0 = \sqrt{j} m_0, \quad m'_1 = \sqrt{j} m_1,$

$$m_0^2 = 8 \pi^2 \cdot 10^{-9} \frac{f}{\rho_0}$$

$$m_1^2 = 8 \pi^2 \cdot 10^{-9} \frac{f \mu}{\rho_0}$$

$f$ : 周波数  $\text{c/s}$

$\rho_0$ : 比抵抗  $\Omega \cdot \text{cm}$

$\mu$ : 実効導磁率

(1.1) 式に於て

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{r_0}{r}} &\div 1 \\ m'_0 &= \frac{1}{\delta_0} (1 + j) \\ m'_1 &= \frac{1}{\delta_1} (1 + j) \end{aligned} \right\} (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \frac{\sqrt{2}}{m_0} = 5.03 \times 10^3 \sqrt{\frac{\rho_0}{f}} \\ \delta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{m_1} = 5.03 \times 10^3 \sqrt{\frac{\rho_0}{f \mu}} = \frac{\delta_0}{\sqrt{\mu}} \end{aligned} \right\} (1.3)$$

を代入して簡単化すると

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{C_1(x) \cos \frac{x}{\delta_0} + j C_2(x) \sin \frac{x}{\delta_0}}{C_1(x_0) \cos \frac{x_0}{\delta_0} + j C_2(x_0) \sin \frac{x_0}{\delta_0}} H_0 \\ H_2 &= \frac{e^{-\frac{x}{\delta_1} (1+j)}}{C_1(x_0) \cos \frac{x_0}{\delta_0} + j C_2(x_0) \sin \frac{x_0}{\delta_0}} H_0 \end{aligned} \right\} (1.4)$$

$x = r - r_1$  ----- 表面層

$= r_2 - r$  ----- 芯部

$$C_1(x) = \cosh \frac{x}{\delta_0} + \sqrt{\mu} \sinh \frac{x}{\delta_0}$$

$$C_2(x) = \sqrt{\mu} \cosh \frac{x}{\delta_0} + \sinh \frac{x}{\delta_0}$$

磁界の強さを尖頭値とし電流密度を実効値で表せば

$$i = - \frac{1}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{\partial H}{\partial r} \quad \text{であるからこれを(1.4)}$$

式によって求めると

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= - \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{1+j}{\delta_0} \frac{C_2(x) \cos \frac{x}{\delta_0} + j C_1(x) \sin \frac{x}{\delta_0}}{C_1(x_0) \cos \frac{x_0}{\delta_0} + j C_2(x_0) \sin \frac{x_0}{\delta_0}} \\ i_2 &= - \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{1+j}{\delta_1} \frac{e^{-\frac{x}{\delta_1}} (1+j)}{C_1(x_0) \cos \frac{x_0}{\delta_0} + j C_2(x_0) \sin \frac{x_0}{\delta_0}} \end{aligned} \right\} (1.5)$$

(1.5) 式に於て

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_0}{\delta_0} \gg 1 \quad \text{の時は} \quad i_1 &= - \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{1+j}{\delta_0} e^{-\frac{x_0-x}{\delta_0}} (1+j) \\ i_2 &= 0 \\ \frac{x_0}{\delta_0} \div 0 \quad \text{の時は} \quad i_1 &= - \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{1+j}{\delta_1} \\ i_2 &= - \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{1+j}{\delta_1} e^{-\frac{x}{\delta_1}} (1+j) \end{aligned} \right\} (1.6)$$

又電流密度の絶対値は

$$\left. \begin{aligned} |i_1| &= \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\delta_0} \sqrt{\frac{Z'_0(x)}{Z_0(x_0)}} \\ |i_2| &= \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\delta_0} \sqrt{\frac{2}{Z_0(x_0)}} e^{-\frac{x}{\delta_1}} \end{aligned} \right\} (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } Z_0(x) &= (\mu+1) \cosh \frac{2x}{\delta_0} + 2\sqrt{\mu} \sinh \frac{2x}{\delta_0} - (\mu-1) \cos \frac{2x}{\delta_0} \\ Z'_0(x) &= (\mu+1) \cosh \frac{2x}{\delta_0} + 2\sqrt{\mu} \sinh \frac{2x}{\delta_0} + (\mu-1) \cos \frac{2x}{\delta_0} \end{aligned} \right\} (1.8)$$

## 1.2 インピーダンス

加熱コイルの内径を $2r_c$ 、長さを $\ell$ 、巻回数 $N$ とし、 $\ell$ が $2r_c$ に比して充分大とする。この加熱コイルに外部電圧 $E_c$ を印加すると、 $E_c$ は被加熱体、空隙及びコイル部に於ける反起電圧（夫々 $E_{00}$ 、 $E_{g0}$ 、 $E_{c0}$ とする。）の和である。即ち

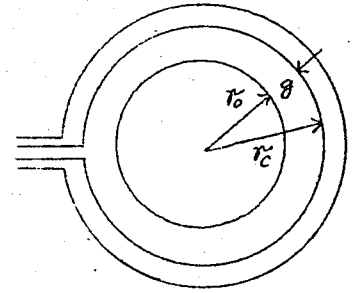


Fig 1-2

$$\frac{E_c}{N} = E_{00} + E_{g0} + E_{c0}$$

$$E_{00} = -2\pi r_0 \rho_0 \dot{\chi}, \quad \chi = \chi_0$$

$$= \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{2\pi r_0 \rho_0}{\delta_0} \left\{ \frac{Z_1(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} + j \frac{Z_2(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} \right\} \quad (1.9)$$

$$E_{g0} = j\omega \frac{H_0}{\sqrt{2}} \pi (r_c^2 - r_0^2) \times 10^{-8}$$

$$E_{c0} = \frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} \frac{2\pi r_c \rho_c}{\delta_c} (1 + j)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\chi) &= (\mu+1) \sinh \frac{2\chi}{\delta_0} + 2\sqrt{\mu} \cosh \frac{2\chi}{\delta_0} + (\mu-1) \sin \frac{2\chi}{\delta_0} \\ Z_2(\chi) &= (\mu+1) \sinh \frac{2\chi}{\delta_0} + 2\sqrt{\mu} \cosh \frac{2\chi}{\delta_0} - (\mu-1) \cos \frac{2\chi}{\delta_0} \end{aligned} \right\} (1.10)$$

又 $\rho_c$ 、 $\delta_c$ は加熱コイルに於ける夫々比抵抗及び渦流の等価渗透深度である。

加熱コイル電流を $I_c$ とすれば  $\frac{H_0}{0.4\pi\sqrt{2}} = \frac{N I_c}{\ell}$  であるから

$$E_c = \frac{N^2 I_c}{\ell} \left\{ \frac{2\pi r_c \rho_c}{\delta_c} + \frac{2\pi r_0 \rho_0}{\delta_0} \frac{Z_1(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} + j \left\{ \frac{2\pi r_c \rho_c}{\delta_c} + 0.4\pi^2 \omega (r_c^2 - r_0^2) \cdot 10^{-8} + \frac{2\pi r_0 \rho_0}{\delta_0} \frac{Z_2(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} \right\} \right\}$$

(1.3) 式より  $\rho = \frac{8\pi^2 \cdot 10^9 f \mu \delta^2}{2}$  を用いて加熱コイル端子よりみた負荷インピーダンス $Z$ を求めると

$$Z = \frac{8\pi^2 f N^2 \cdot 10^9}{\ell} \left[ r_c \delta_c + r_0 \delta_0 \frac{Z_1(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} + j \{ r_c \delta_c + (r_c^2 - r_0^2) + r_0 \delta_0 \frac{Z_2(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} \} \right] \quad (1.11)$$

$$\text{更に } k_r = \frac{r_c}{r_0}$$

$$k_{\delta} = \frac{\delta_c}{\delta_0}$$

(8)

(1.12)

$$Z = k_r k_s + \frac{Z_1(x_0)}{Z_0(x_0)} + j \left\{ k_r k_s + \frac{g}{s_0} (1 + k_r) + \frac{Z_2(x_0)}{Z_0(x_0)} \right\}$$

とすれば

$$\begin{aligned} Z &= \frac{8\pi^2 f N^2 r_0 s_0 \cdot 10^{-9}}{\ell} Z \\ &= \frac{2\pi r_0 N^2}{\ell} \frac{\rho_0}{s_0} Z \quad \text{----- (1.13)} \end{aligned}$$

尚表面層が存在しないか、或は逆に非常に厚く、被加熱体は単一媒質と見なされ得る場合には (1.13) 式は次の如くなる。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{8\pi^2 f N^2 r_0 s}{\ell} \cdot 10^{-9} Z' \\ &= \frac{2\pi r_0 N^2}{\ell} \frac{\rho}{\mu s} Z' \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Z &= \frac{8\pi^2 f N^2 r_0 s}{\ell} \cdot 10^{-9} Z' \\ &= \frac{2\pi r_0 N^2}{\ell} \frac{\rho}{\mu s} Z' \end{aligned}} \right\} \text{ (1.14)}$$

$$Z = k_r k_s + \mu + j \left\{ k_r k_s + \frac{g}{s} (1 + k_r) + \mu \right\}$$

$\rho, \mu, s$  は任意な被加熱体の夫々比抵抗、導磁率及びそれに対する渦流の等価透度であり、 $k_s$  も (1.12) 式で用いられたと同様  $s_0$  と  $s$  の比を示す。表面層が厚い場合には、 $\rho = \rho_0$ 、 $\mu = 1$  とすればよい。

### 1.3 電力密度及び等価透過深度

表面層及び芯部に於ける電力密度を夫々  $w_1, w_2$  とすれば (1.7) 式 (1.3) 式より

$$\begin{aligned} w_1 &= |i_1|^2 \rho_0 = 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{Z_1'(x)}{Z_0(x_0)} \\ w_2 &= |i_2|^2 \rho_0 = 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2g - \frac{2x}{s}}{Z_0(x_0)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} w_1 &= |i_1|^2 \rho_0 = 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{Z_1'(x)}{Z_0(x_0)} \\ w_2 &= |i_2|^2 \rho_0 = 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2g - \frac{2x}{s}}{Z_0(x_0)} \end{aligned}} \right\} \text{ (1.15)}$$

これらを夫々の領域で積分することにより、表面層及び芯部に於て単位面積当りに吸収される電力は、夫々  $w_1, w_2$  とすると

$$\begin{aligned} W_1 &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \left\{ \frac{s_0}{2} \frac{Z_1(x_0)}{Z_0(x_0)} - \frac{s_1}{2} \frac{2\mu}{Z_0(x_0)} \right\} \\ W_2 &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \frac{s_1}{2} \frac{2\mu}{Z_0(x_0)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} W_1 &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \left\{ \frac{s_0}{2} \frac{Z_1(x_0)}{Z_0(x_0)} - \frac{s_1}{2} \frac{2\mu}{Z_0(x_0)} \right\} \\ W_2 &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \frac{s_1}{2} \frac{2\mu}{Z_0(x_0)} \end{aligned}} \right\} \text{ (1.16)}$$

従って被加熱体の単位表面積当りの吸収電力  $W_0$  は

$$W_0 = 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \frac{s_0}{2} \frac{Z_1(x_0)}{Z_0(x_0)} \quad \text{----- (1.17)}$$

又被加熱体外表面に於ける電力密度  $w$  は

$$w_0 = 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \frac{Z'_0(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)} \quad \text{-----} (1.18)$$

であるから電力の等価浸透深度を  $\Delta$  とすれば

$$\Delta = \frac{\delta_0}{2} \frac{Z_0(\chi_0)}{Z'_0(\chi_0)} \quad \text{-----} (1.19)$$

次にこれらを加熱コイルの端子電圧  $E_c$  で表すと

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{0.4 \pi \sqrt{2} N I_c}{l} \\ &= \frac{E_c}{2 \pi r_0 N} \frac{\sqrt{2} \cdot 10^9}{\pi f \delta_0} \frac{1}{|\Sigma|} \quad \text{-----} (1.20) \end{aligned}$$

を利用して

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= \left( \frac{E_c}{2 \pi r_0 N} \right)^2 \frac{\delta_0}{P_0} \frac{\frac{Z_0(\chi_0)}{Z'_0(\chi_0)}}{|\Sigma|^2} \\ w_0 &= \left( \frac{E_c}{2 \pi r_0 N} \right)^2 \frac{2}{P_0} \frac{\frac{\delta'_0(\chi_0)}{Z_0(\chi_0)}}{|\Sigma|^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

表面層が存在しない時、或は被加熱体が単一媒質と見なされ得る場合には

$$\left. \begin{aligned} w &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \mu \varepsilon^{-\frac{2\chi}{\delta}} \\ w_0 &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \mu = \left( \frac{E_c}{2 \pi r_0 N} \right)^2 \frac{2}{P} \frac{\mu^2}{|\Sigma|^2} \\ \Delta &= \frac{\delta}{2} \\ W_0 &= 2.5 f H_0^2 \cdot 10^{-8} \mu \frac{\delta}{2} = \left( \frac{E_c}{2 \pi r_0 N} \right)^2 \frac{\delta}{P} \frac{\mu^2}{|\Sigma|^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

(1.22) 式は (1.14) 式に対応するものである。

#### 1.4 計算例

被加熱体に高周波磁界が印加されると、本章の仮定に基づいて被加熱体は先づ単一媒質と見なされ、比抵抗  $P$  は温度上昇と共に増加する。而して加熱が進行して表面付近の温度が磁気変態点に達すると

比抵抗  $\rho$  は一定値  $\rho_0$  となり、 $\rho = 1$  なる表面層が形成されるようになり二層媒質となるものとした。従ってこゝに計算例として、これら加熱進行に伴う被加熱体の電磁媒質的定数変化及び構造変化に対応して発熱源である電力密度の分布状況、及びこれが高周波電源に接続される場合の考慮としてその電気インピーダンス等を示す。

二層媒質形成以後に於ける加熱進行の程度は表面層の厚さ  $x_0$  で示され、この量が高周波焼入の焼入深度を決定する重要な目安となるものであるが、被加熱体を電磁媒質として見る時は被加熱体が究極的に全体が表面層媒質に到達した時の渦流の等価浸透深度  $\delta$  にて  $x_0$  を除した  $x_0/\delta$  を以て加熱進行の度合を示すと一般性を増す。

更に加熱初期に於ける表面層形成以前に対する加熱進行の程度は比抵抗  $\rho$  の変化で表現されるが、これについては比抵抗の仮定的最終一定値  $\rho_0$  との比を  $\alpha^2$  とし、二層媒質に対する算式を次の如く単一媒質に拡張する。

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{とすれば}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z_1(x_0)}{Z_0(x_0)} &= \frac{Z_2(x_0)}{Z_0(x_0)} = \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha} \\ \frac{Z'_0(x_0)}{Z_0(x_0)} &= \mu \\ \frac{Z_1(x_0)}{Z'_0(x_0)} &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

表面層形成以前に対して (1.23) 式を適用すれば (1.13)~(1.21) 式の二層媒質に関する諸算式はそのまま加熱初期の単一媒質体にも応用出来る事になり、 $\alpha$  及び  $x_0/\delta$  を以て被加熱体に於けるすべての加熱進行の程度を表現出来る事になる。

次に数値計算の定数値に関しては、単一媒質を代表するものとして表面温度が約  $200^\circ\text{C}$ ,  $500^\circ\text{C}$ ,  $800^\circ\text{C}$ , に対応する比抵抗を夫々  $30 \times 10^{-6}$ ,  $60 \times 10^{-6}$ ,  $120 \times 10^{-6} \Omega\text{-cm}$ ;  $\rho_0 = 120 \times 10^{-6}$  とすれば

$\alpha = 2, \sqrt{2}, 1$  とし、 $\mu$  については単位表面積当りに換算された吸収電力  $W_0$  に影響されるが、こゝではその代表例として第1表の数値を採用した。(  $W_0$  として  $0.2 \sim 1.5 \text{ kW/cm}^2$  の範囲)

$f$ (KC)	1	3	10	30	100	400
$\delta_0$ (m/m)	17.4	10.03	5.5	3.17	1.74	0.87
$\mu$	10	10	10, 20, 40	20, 40	40, 80	80, 160

第 1 表  $\rho_0 = 120 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$

(i) 電力密度分布

表面より被加熱体内部への距離を  $x$  とし、その点に於ける電力密度  $w$  と外表面電力密度  $w_0$  との比を  $\frac{x}{\delta_0}$  について求めたものを、  
Fig. 1-3 (a) ~ Fig. 1-3 (d) に示す。

但し 曲線 (1) .....  $\frac{x}{\delta_0} = 0$

(2) ... = 0.1

(3) ... = 0.25

(4) ... = 0.5

(5) ... = 0.75

(6) ... = 1.0

(7) ... = 1.5

(8) ... =  $\infty$



(13)

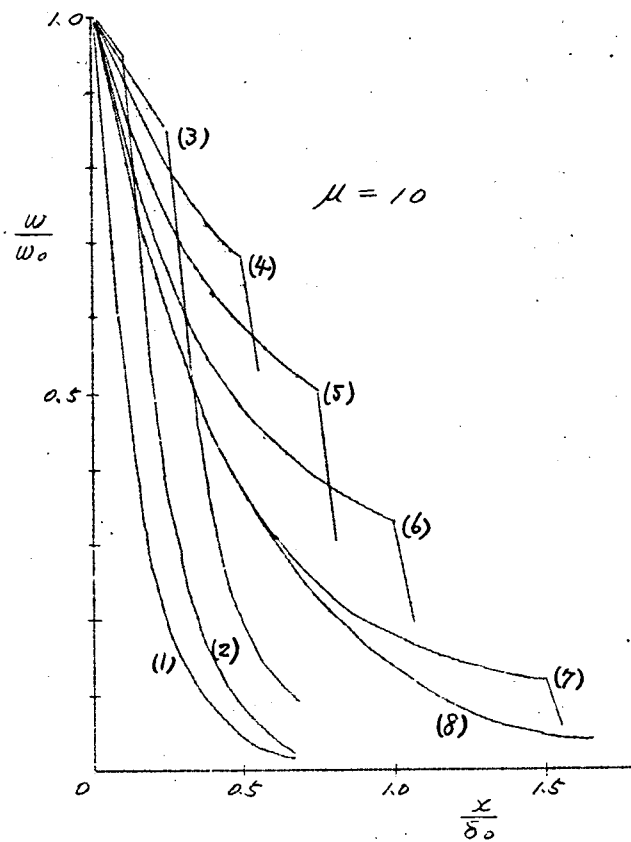


Fig 1-3 (a)

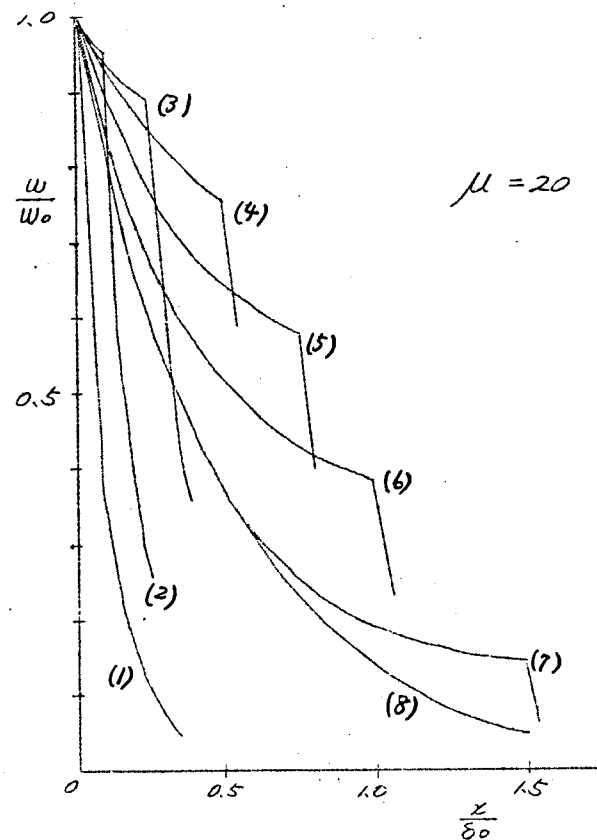


Fig 1-3 (b)

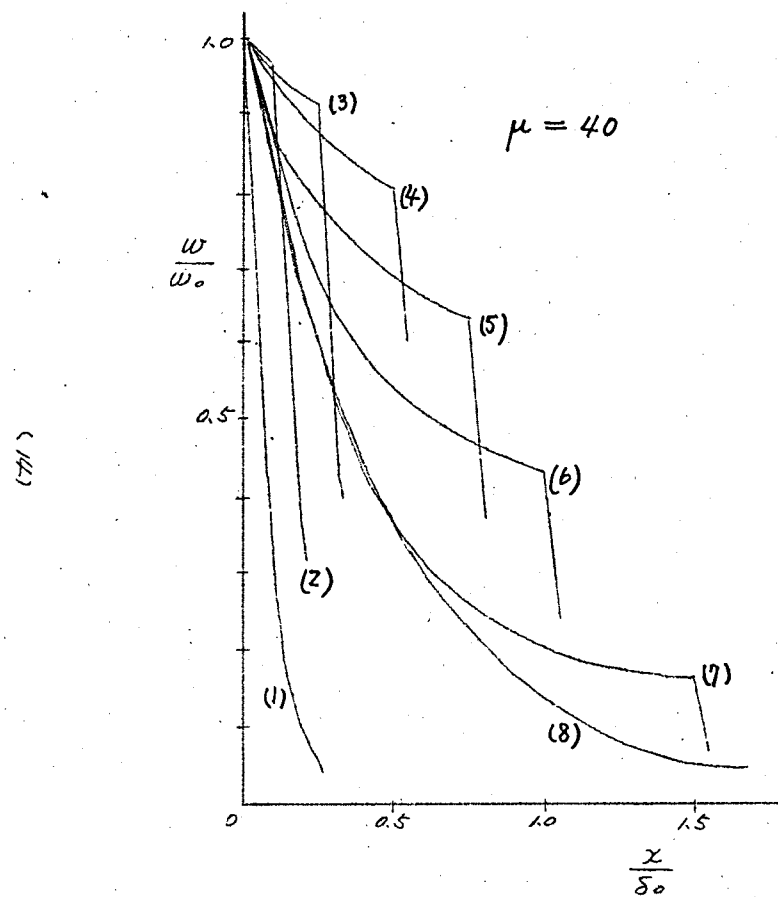


Fig 1-3 (c)

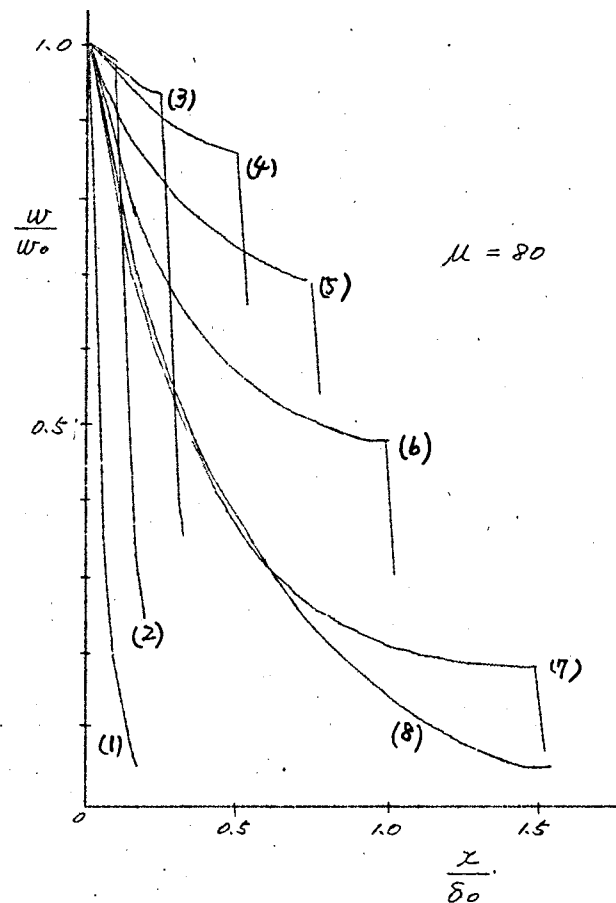
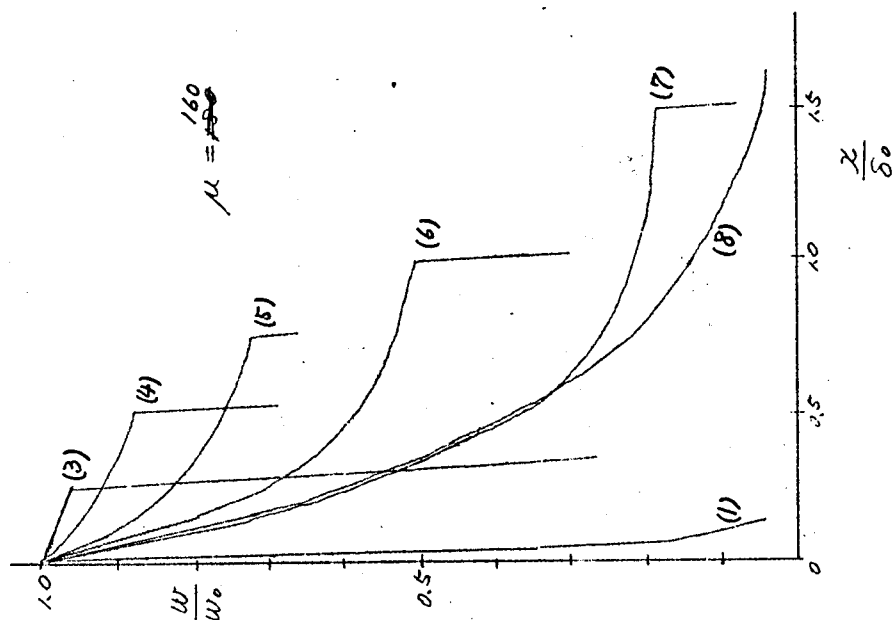


Fig 1-3 (d)



#### (vii) 等価電力深度

電力密度分布の状況は Fig 1-3 に示す如くであるが、こゝに与えられた全電力が外表面電力密度  $w_0$  で一様に  $\Delta$  なる厚さの層に分布されるとした時、 $\Delta$  が等価電力深度であって (1-19) 式で与えられる。被加熱体の温度状態、或は加熱進行の程度を示す  $\alpha$  及び  $z_0/\delta_0$  を横軸にとって  $Z_0(x_0)/Z_0(x_0)$  を縦軸にとり、導磁率  $\mu$  の影響を併せ示したものを Fig 1-4 に示す。

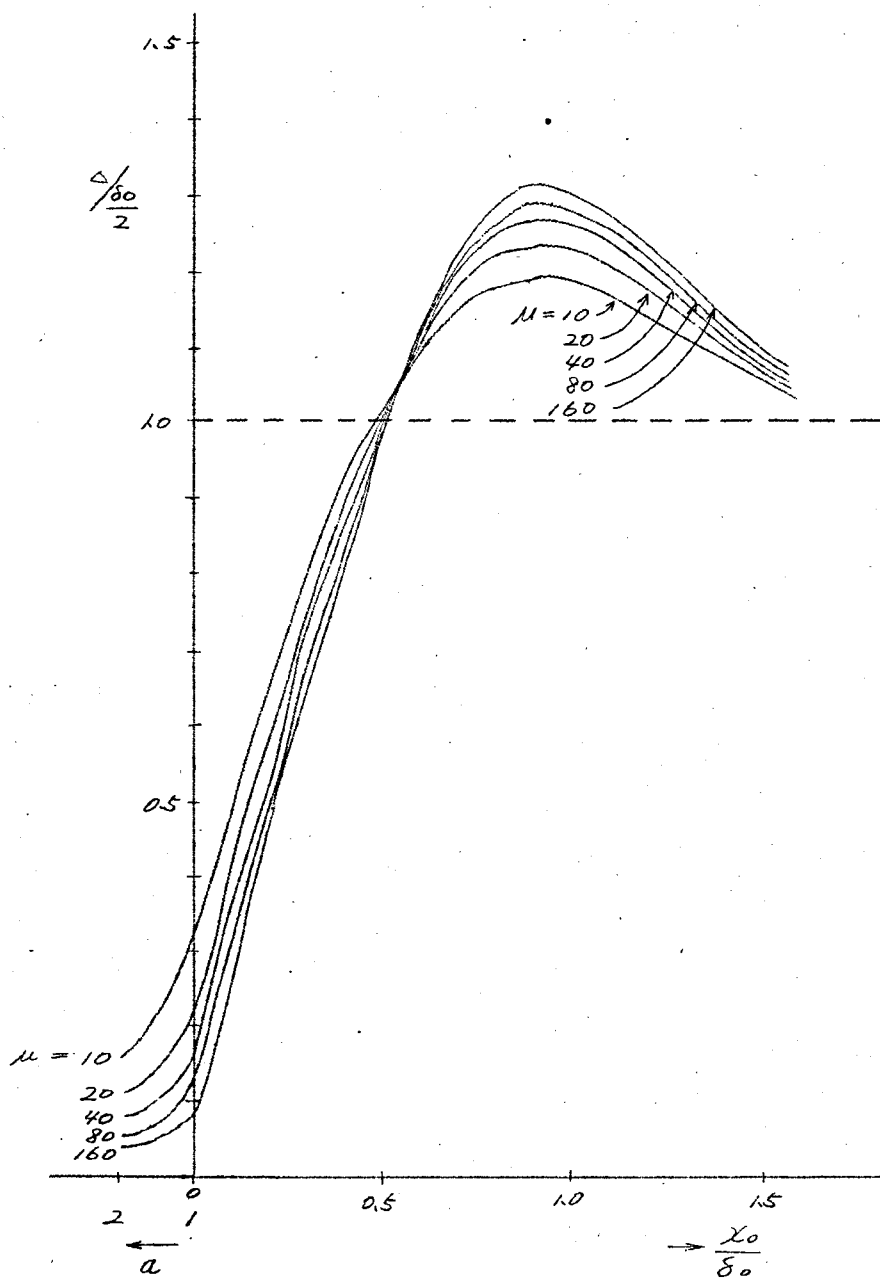


Fig 1-4

(iii) 外表面電力密度

周波数 $f$ 及び外部磁界の強さ $H_0$ を一定とせる場合の外表面電力密度 $w_0$ が被加熱体の温度状況によって如何に変化するかを Fig 1-5 に示す。

次に加熱コイルの印加電圧 $E_c$ を一定として、 $w_0$ の $a$ 及び $\frac{r}{\delta_0}$ に対する変化を代表的周波数について計算するに、一般に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_c}{\delta_0} &= k_{\delta_0} \ll \frac{Z_1(X_0)}{Z_0(X_0)} \\ k_{\delta_0} &\ll \frac{Z_2(X_0)}{Z_0(X_0)} + \frac{g}{\delta_0}(1+k_r) \end{aligned} \right\} \text{--- (1.24)}$$

$$\text{又、 } r_c \approx r_0, \text{ or } k_r \approx 1 \text{ --- (1.25)}$$

なる場合、(1.12)式で示される $Z$ は次の如くである。

$$Z = \frac{Z_1(X_0)}{Z_0(X_0)} + j \left\{ \frac{2g}{\delta_0} + \frac{Z_2(X_0)}{Z_0(X_0)} \right\} \text{--- (1.26)}$$

Fig 1-6 (e) ~ (f) は (1.26)式 によって (1.21)式の $w_0$ を計算、図示したものである。但し  $\rho_0 = 120 \times 10^6 \Omega \cdot \text{cm}$ とした。



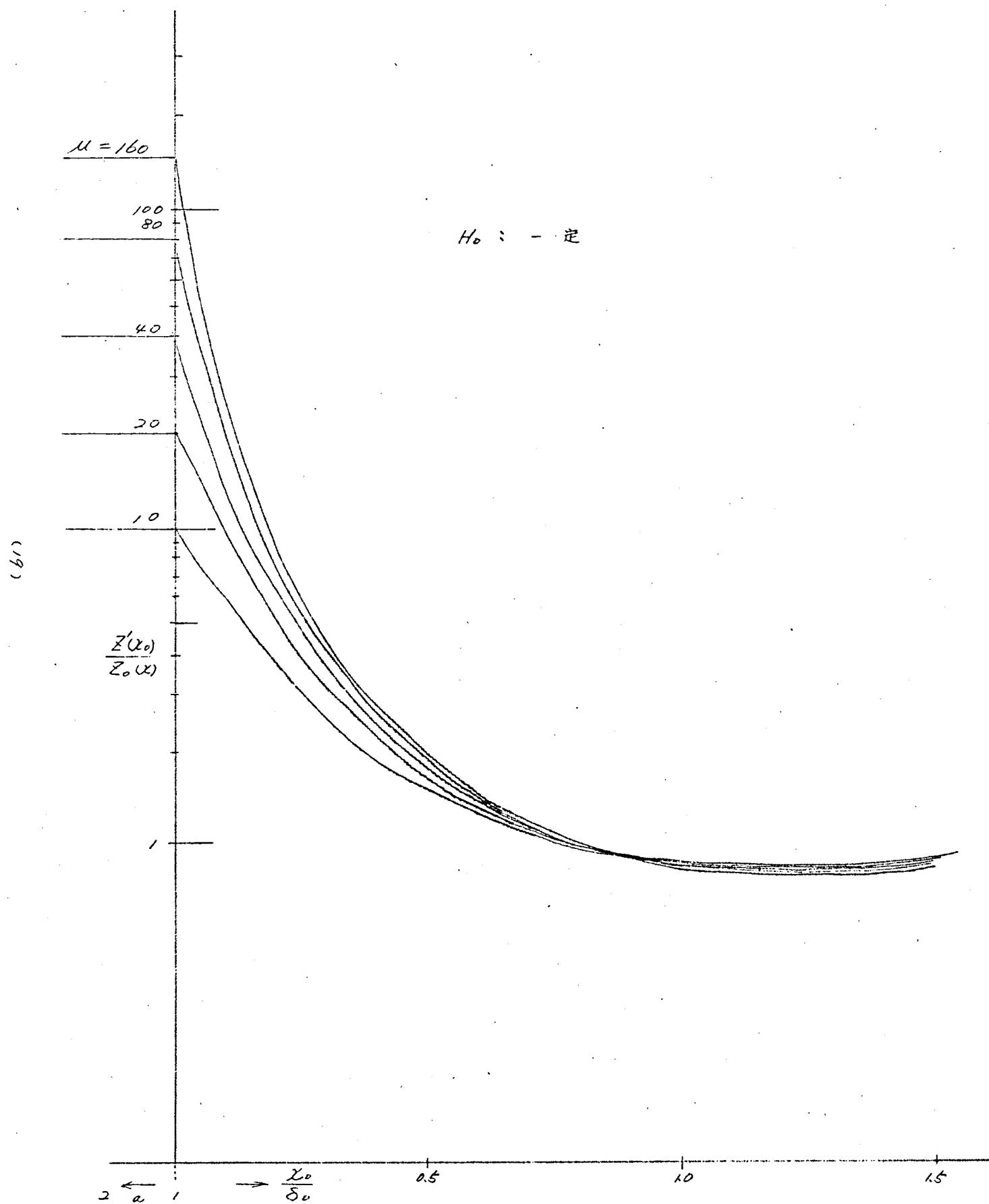


Fig 1-5

Fig. 1-6 (a)

$$f = 1 \text{ Kc}$$

$$\mu = 10$$

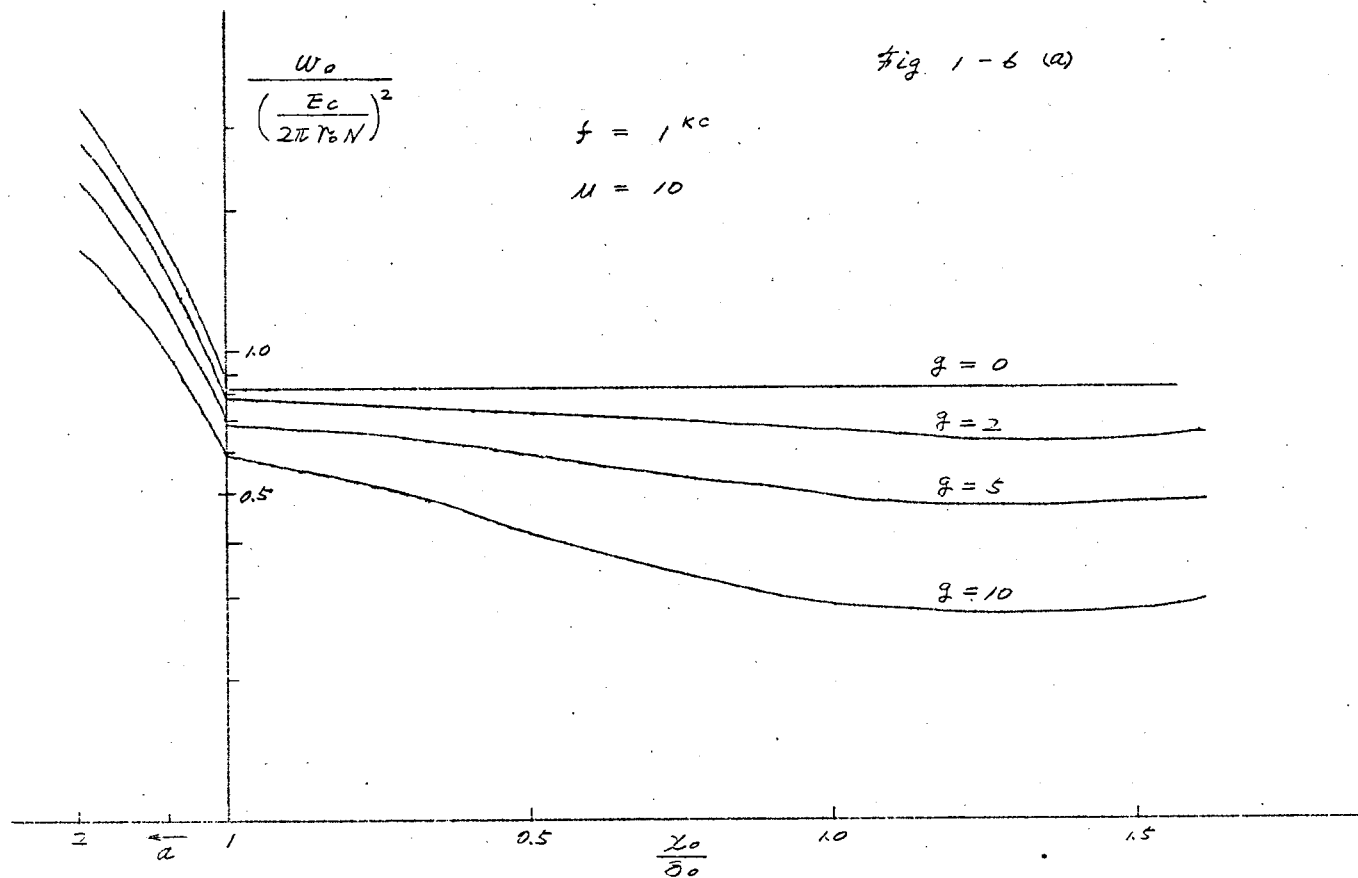
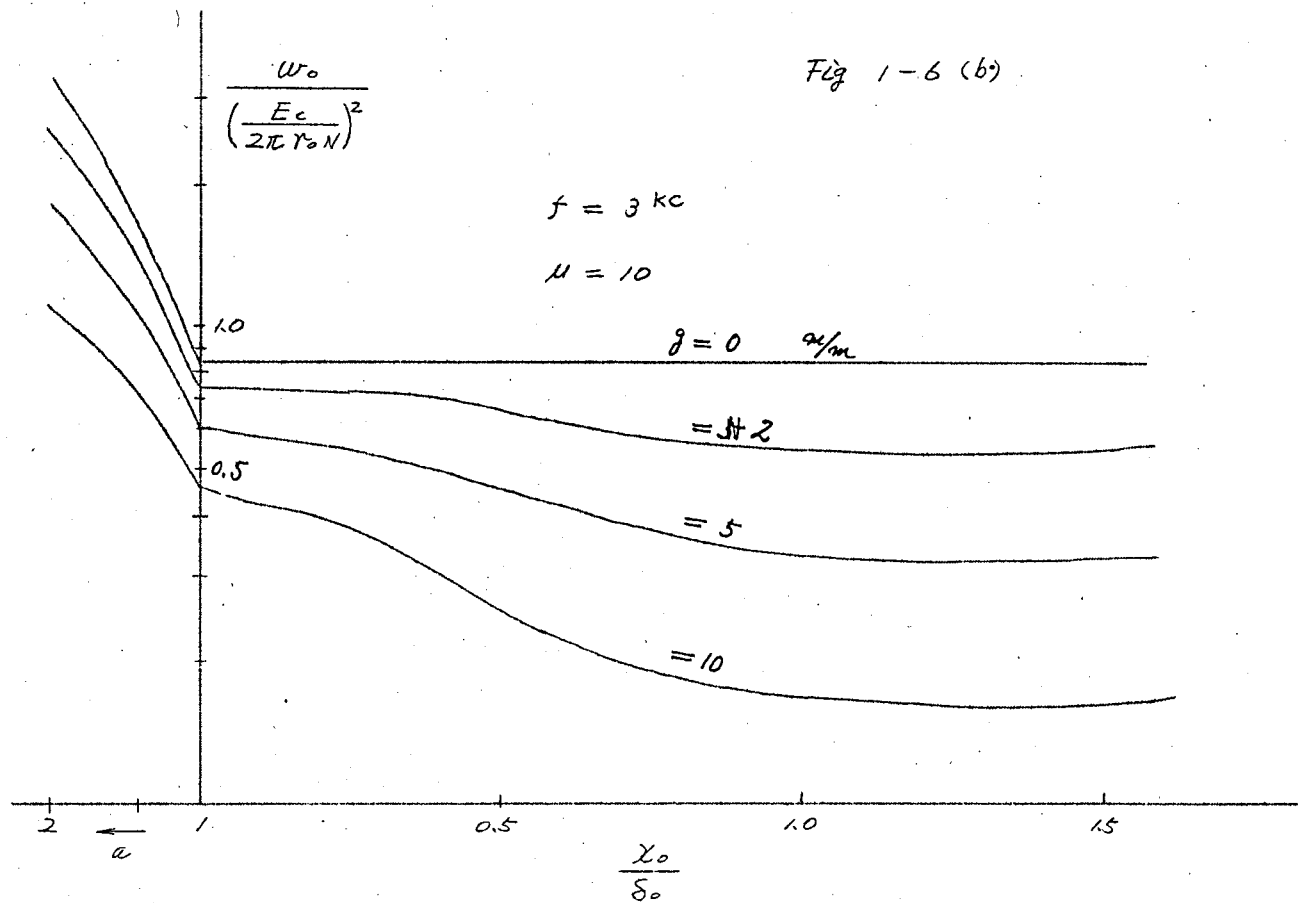




Fig 1-6 (b)



(21)

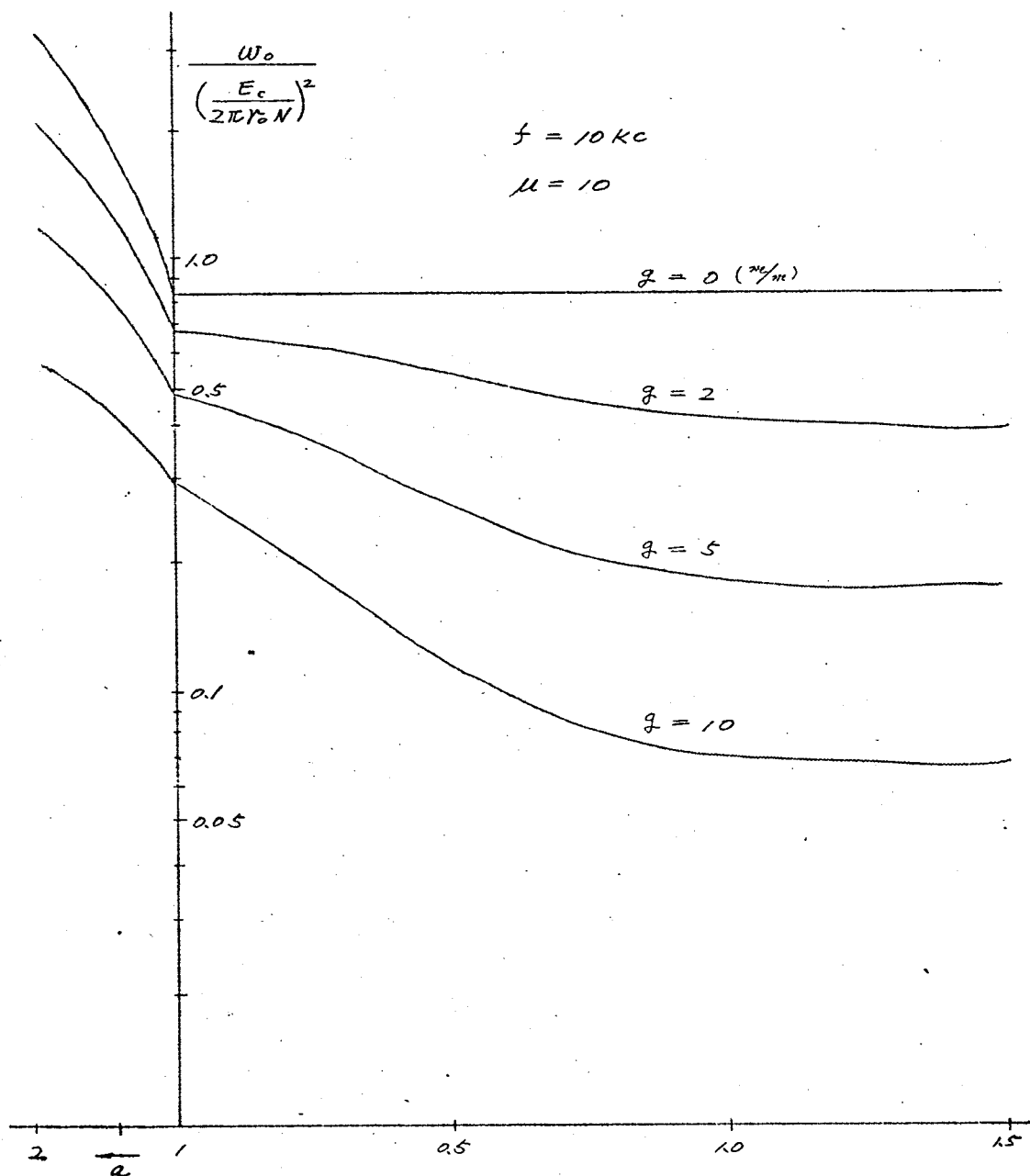


Fig 1-6 (C')

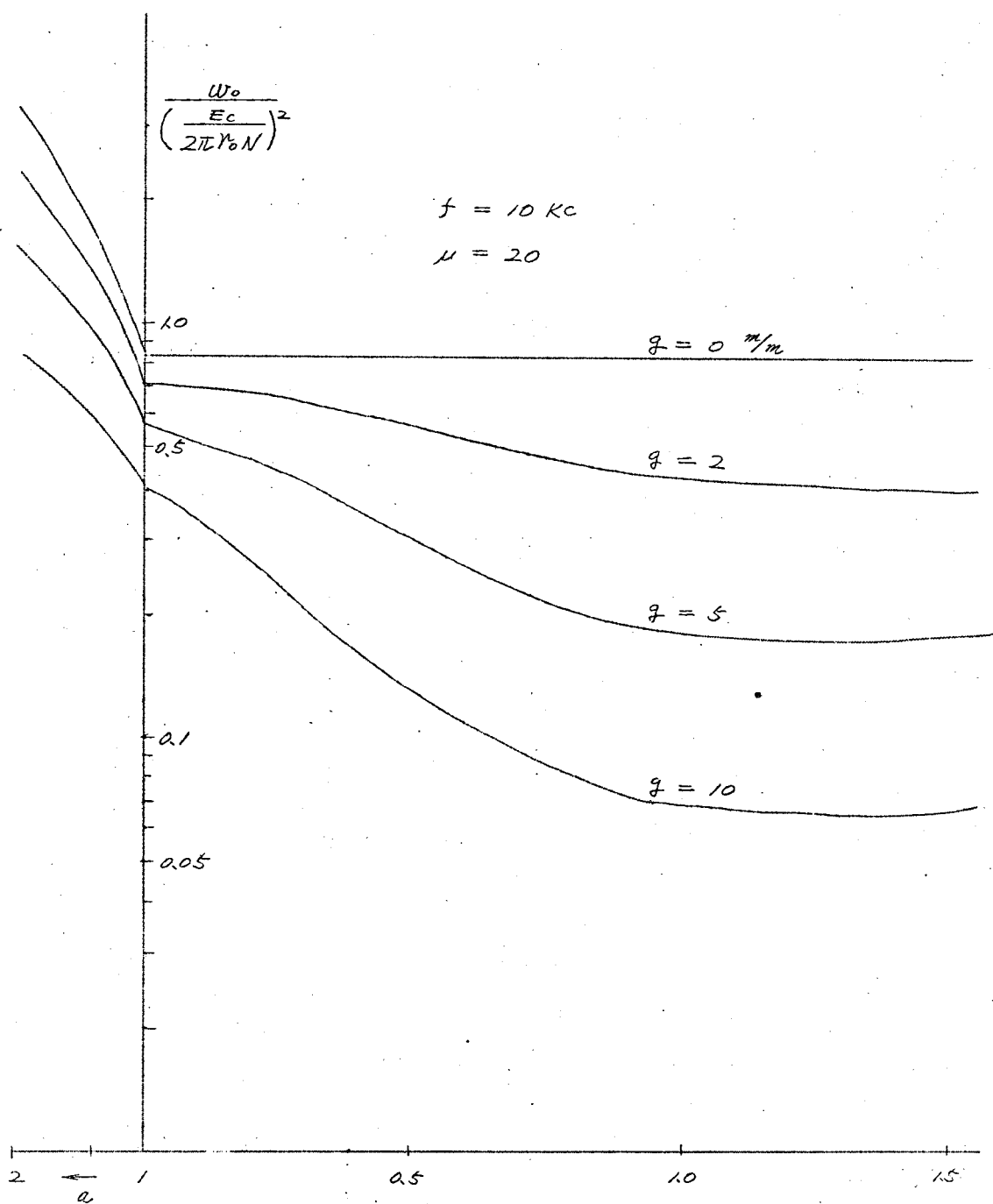


Fig 1-6 (C')

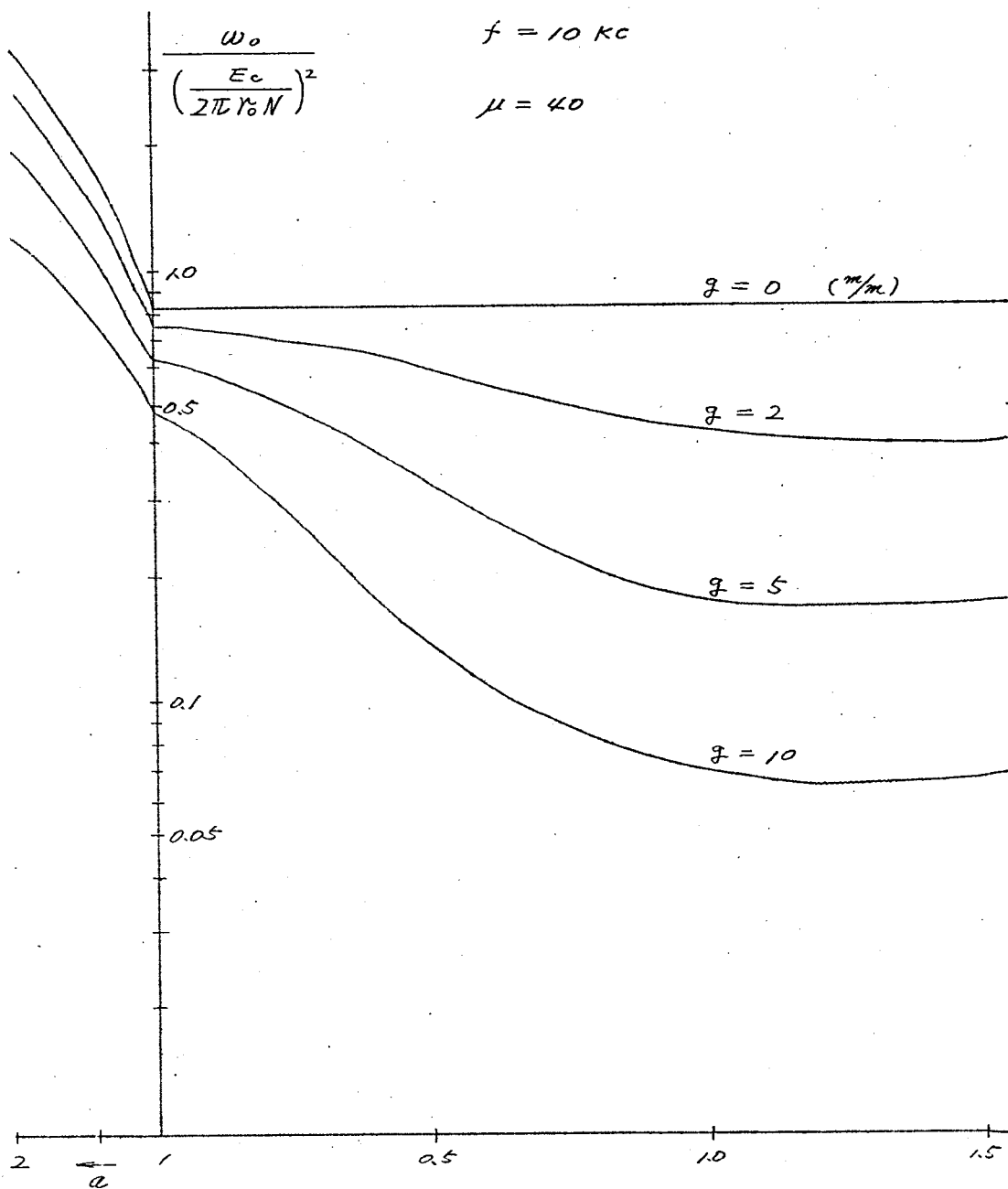


Fig 1-6 (C<sup>m</sup>)

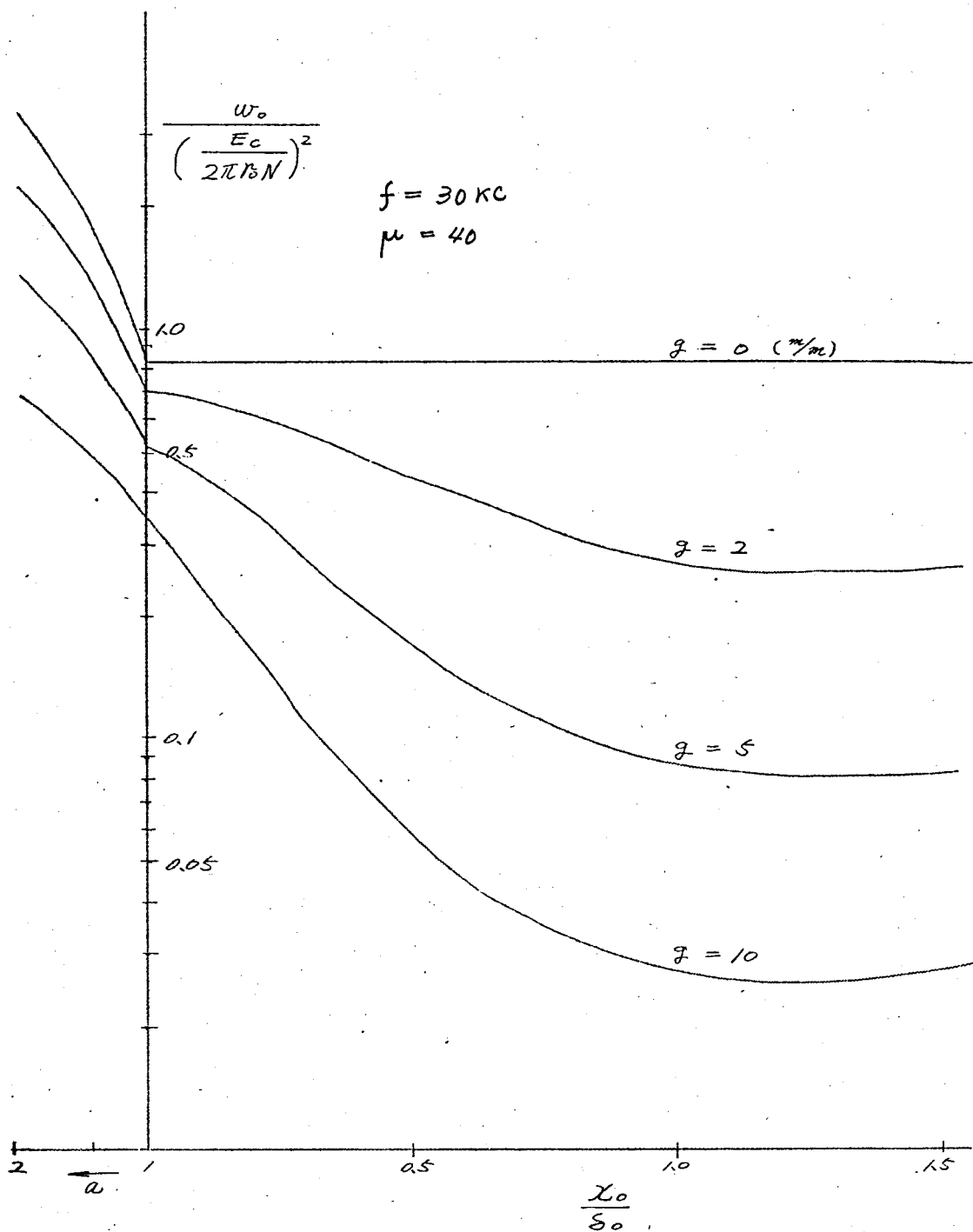


Fig 1-6 (d)

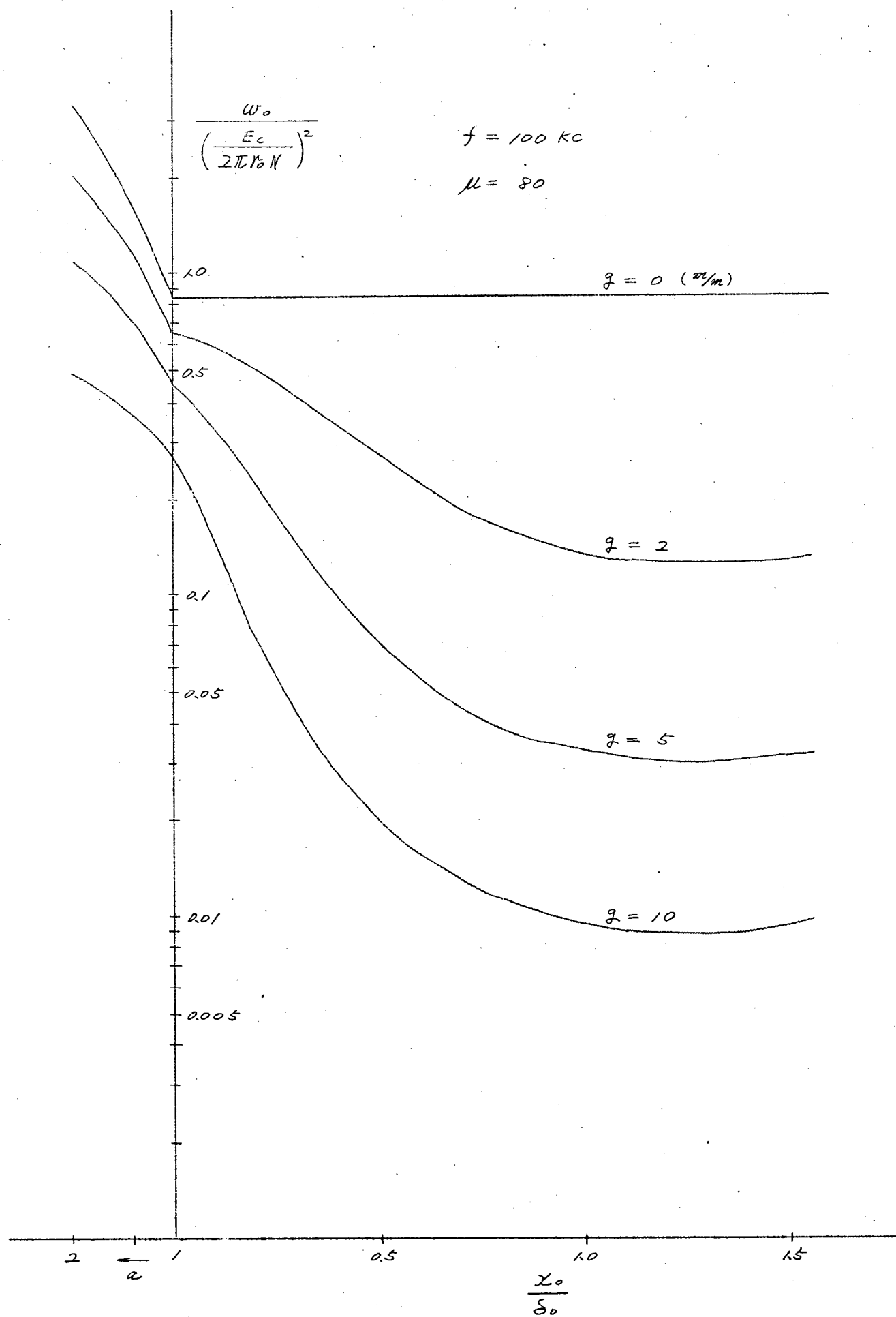
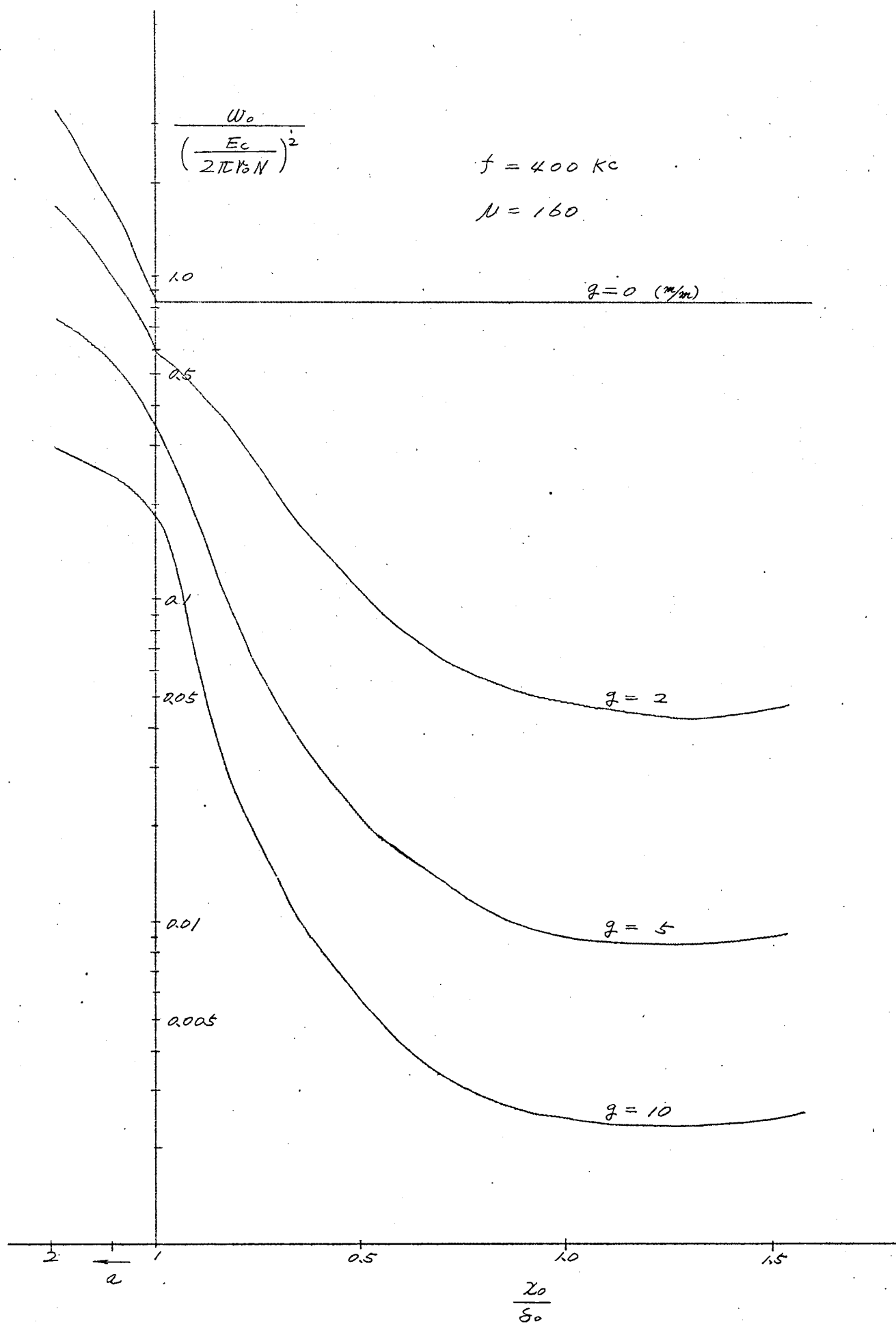


Fig 1-b (e)



(27)

Fig 1-6 (f)

(14) 単位表面積当り吸収電力

(iii)と同様に  $E_c$  を一定とせる単位表面積当りの吸収電力  $W_o$  は (1.21) 式で与えられ、代表的周波数について計算図示すると Fig 1-7 (a) ~ (f) に示す如くなる。

尚、加熱コイルの電流  $I_c$  を一定とする時は、 $H_o$  が一定であるから、(1.17) 式より  $W_o$  の変化する模様はインピーダンスの抵抗分  $Z_o(x_o)/E_o(x_o)$  の変化する模様と全く同一であるので、こゝでは省略する。

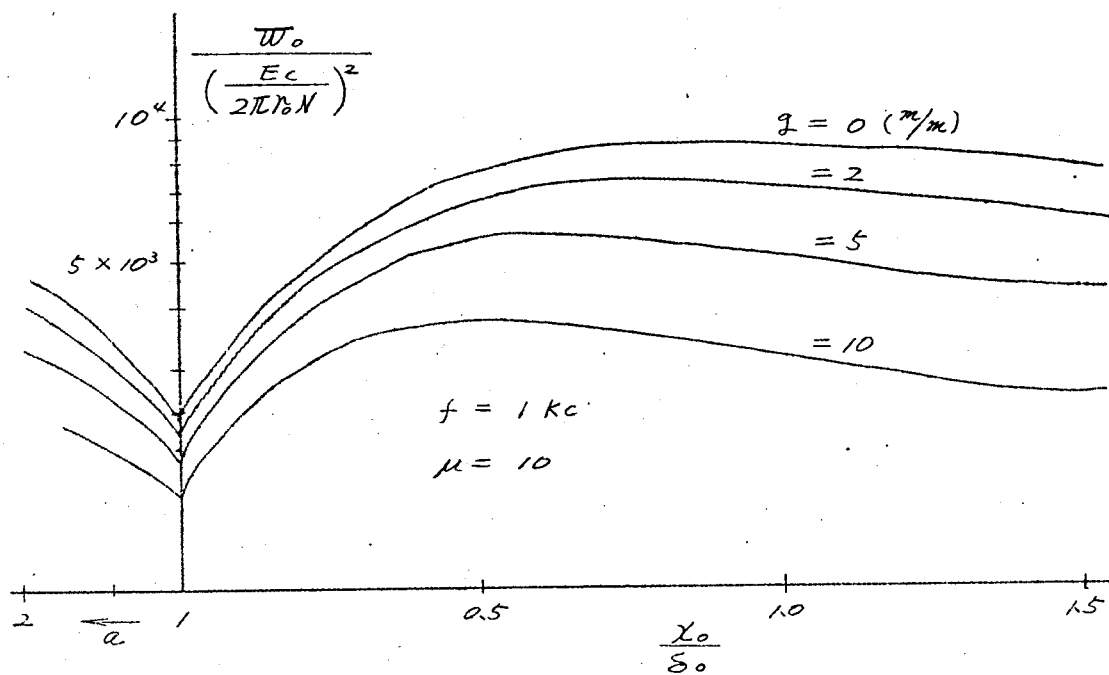


Fig 1-7 (a)



(29)

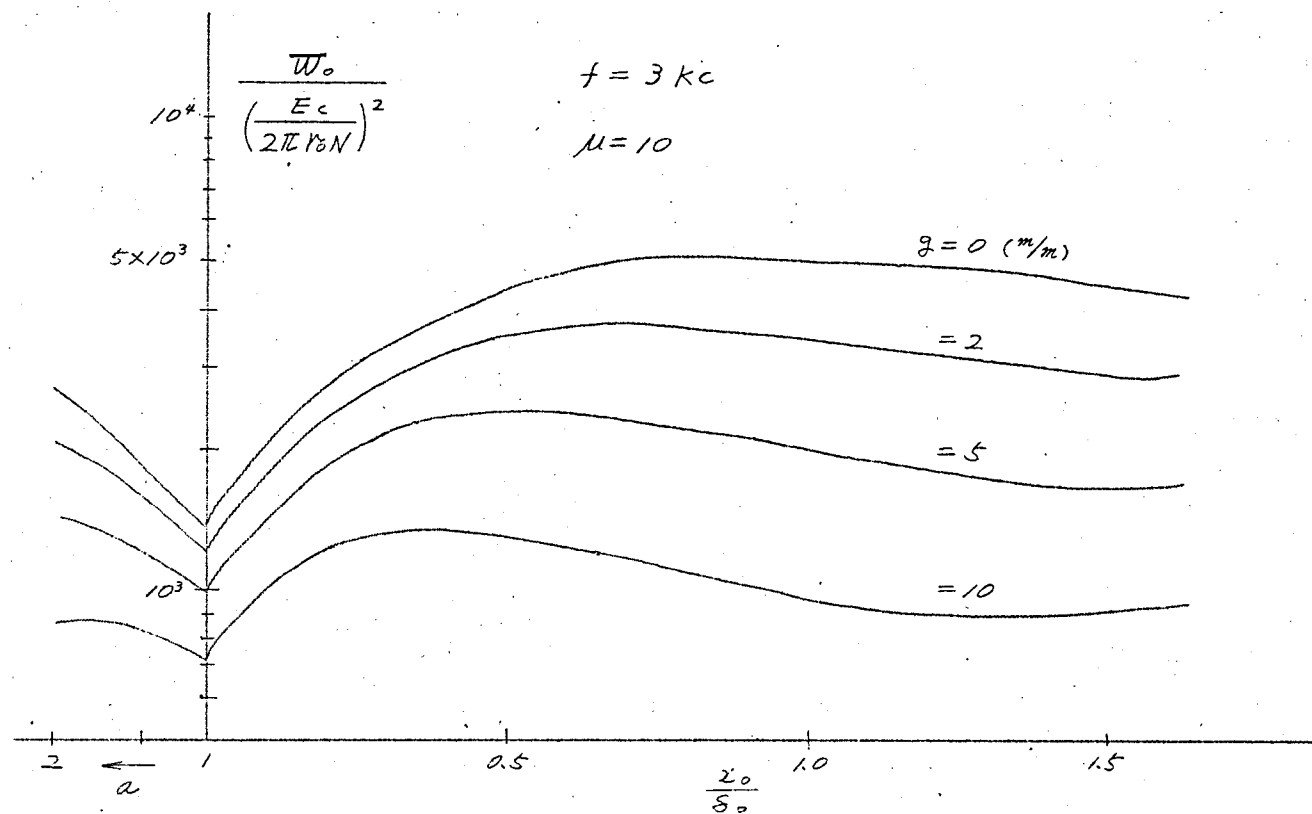
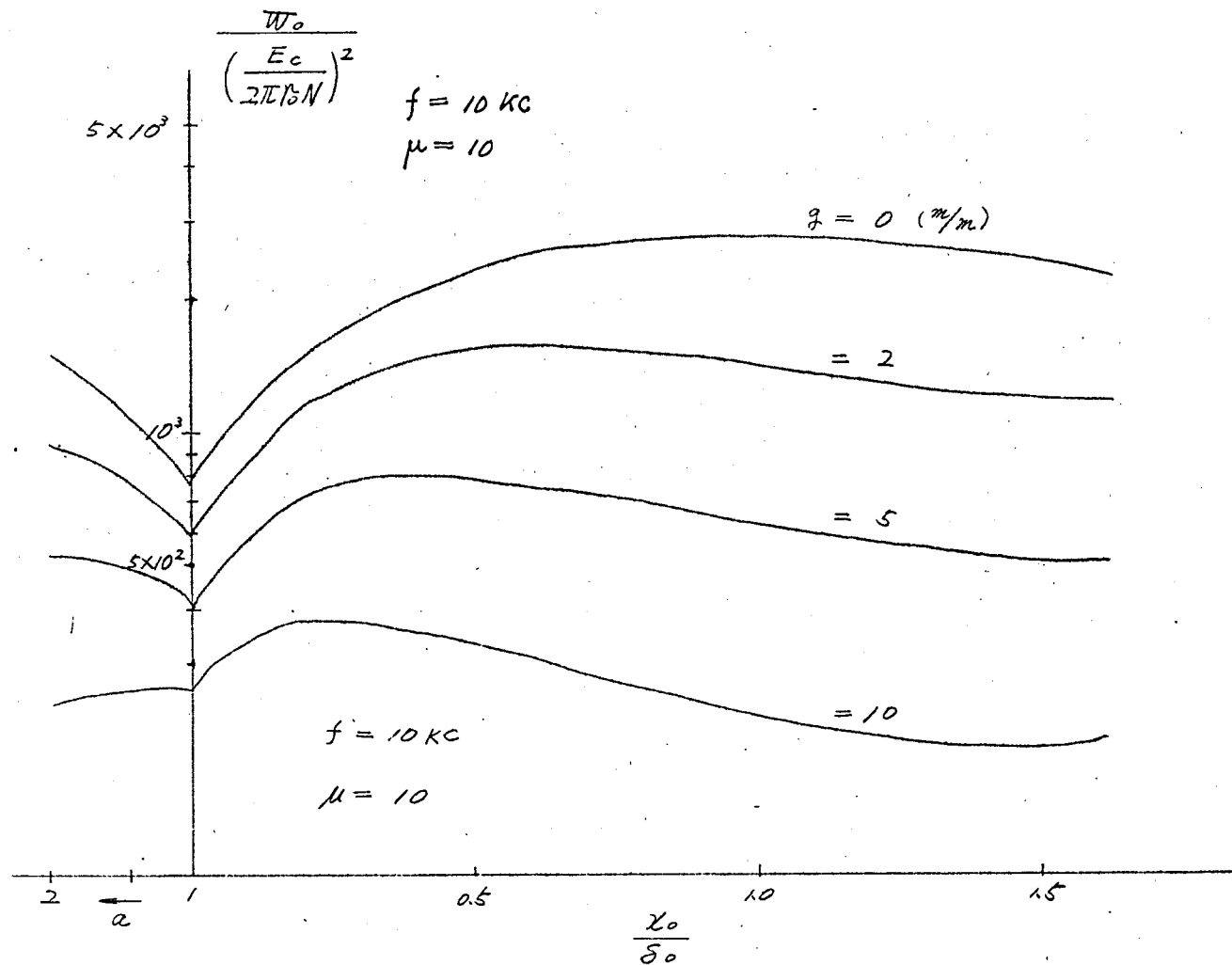


Fig 1-7 (b)

(30)



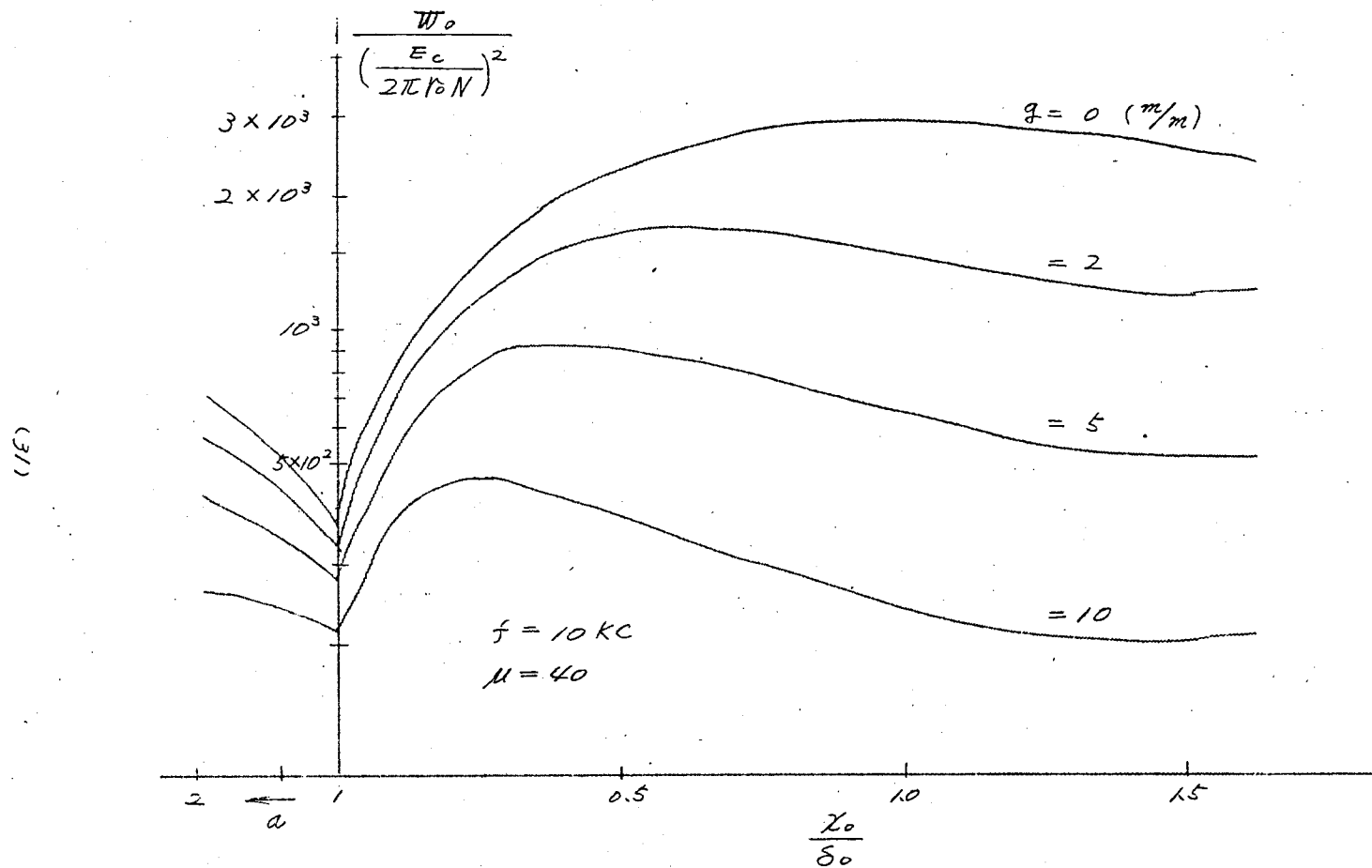


Fig 1-7 (C)

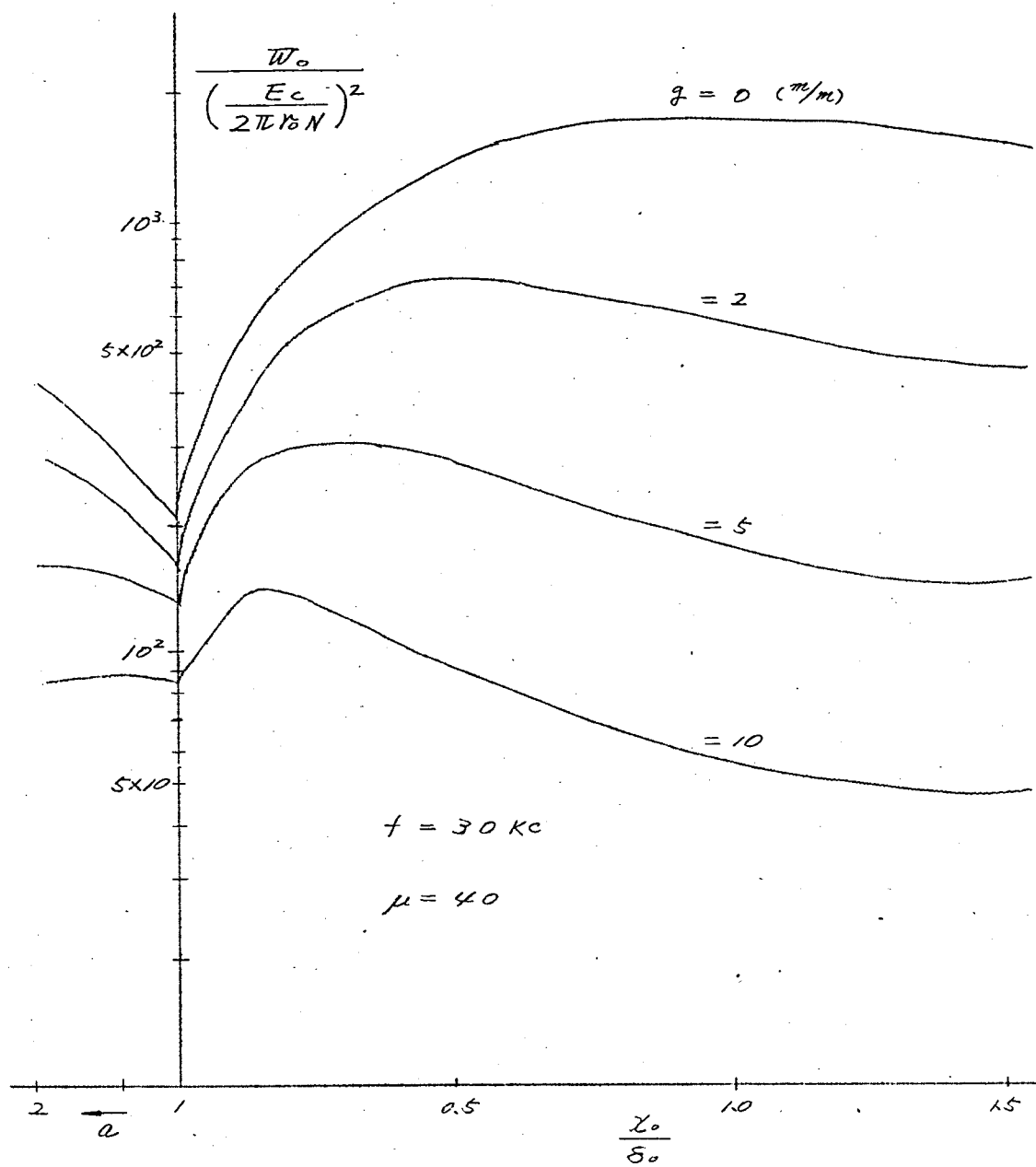


Fig 1-7 (d)

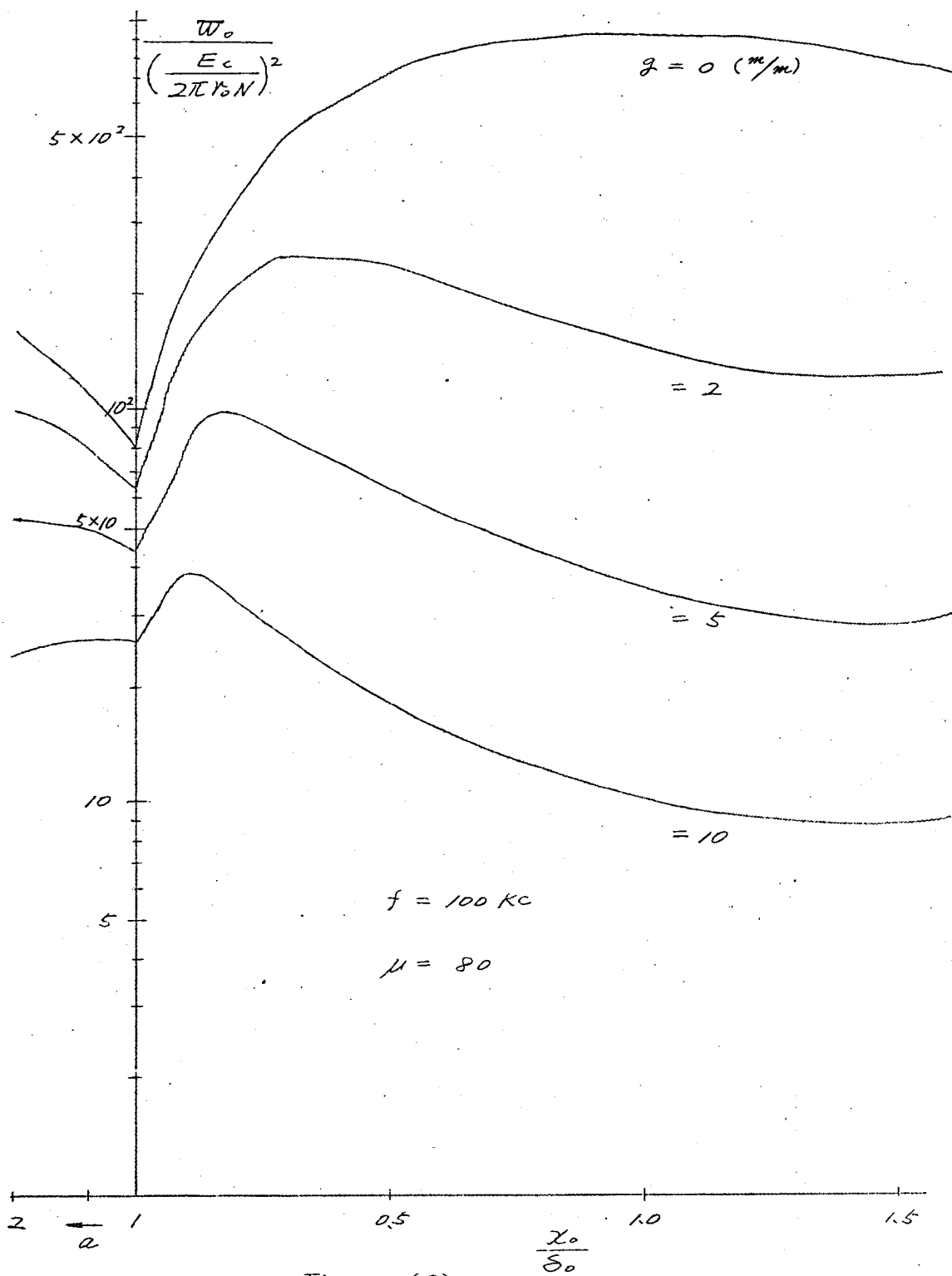


Fig 1-7 (e)

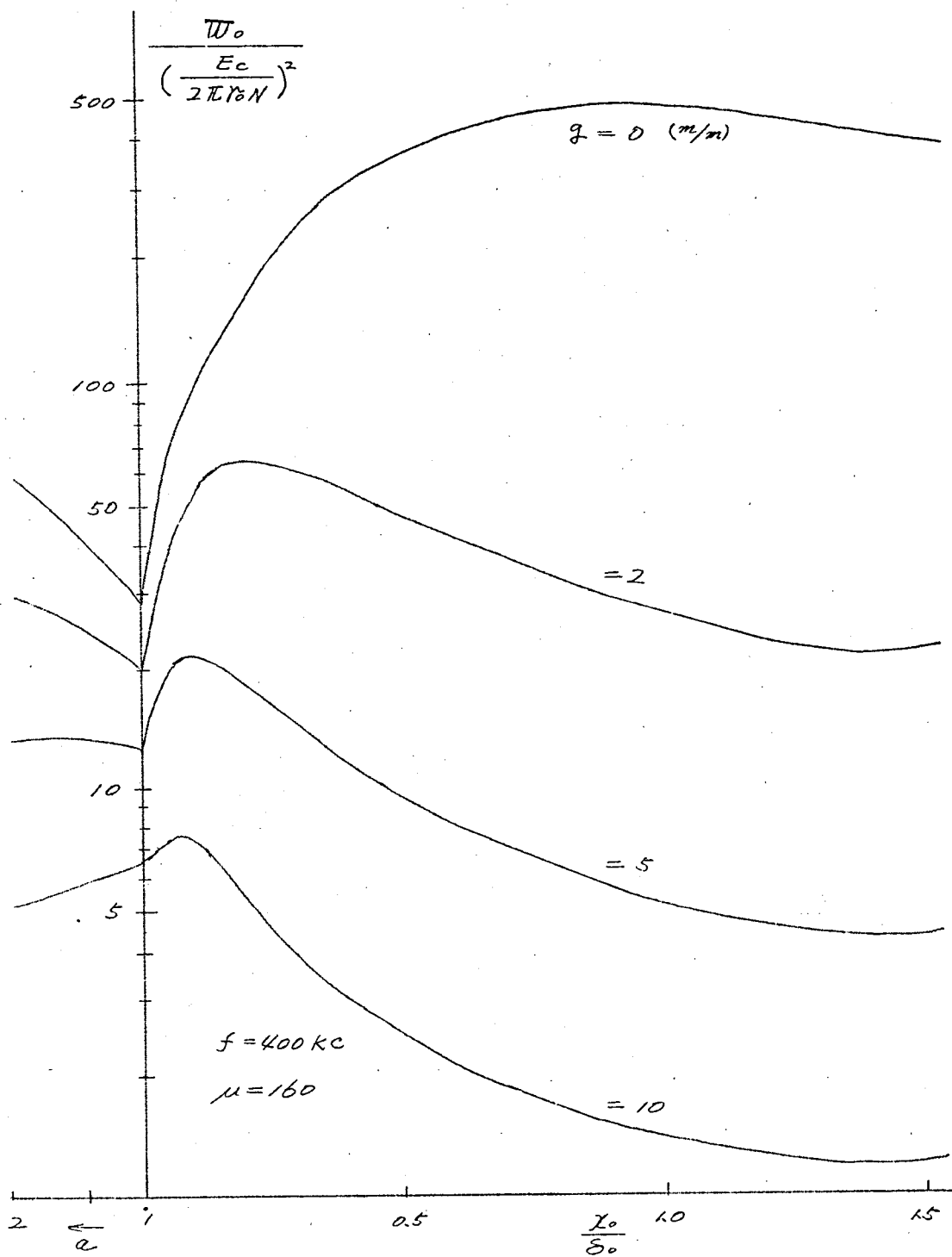


Fig 1-7 (f)

#### (V) インピーダンス

加熱コイル端子より見た負荷インピーダンス  $Z$  は (1.13) 式で与えられる。故に加熱進行に伴うインピーダンス変化は (1.26) 式によりその大要を知る事が出来る。Fig 1-8 (a) にはその抵抗分  $Z_1(x_0)/Z_0(x_0)$ 、及びリアクタンス分  $Z_2(x_0)/Z_0(x_0)$ 、Fig 1-8 (b) に  $2g/g_0$  の変化する模様を示す。

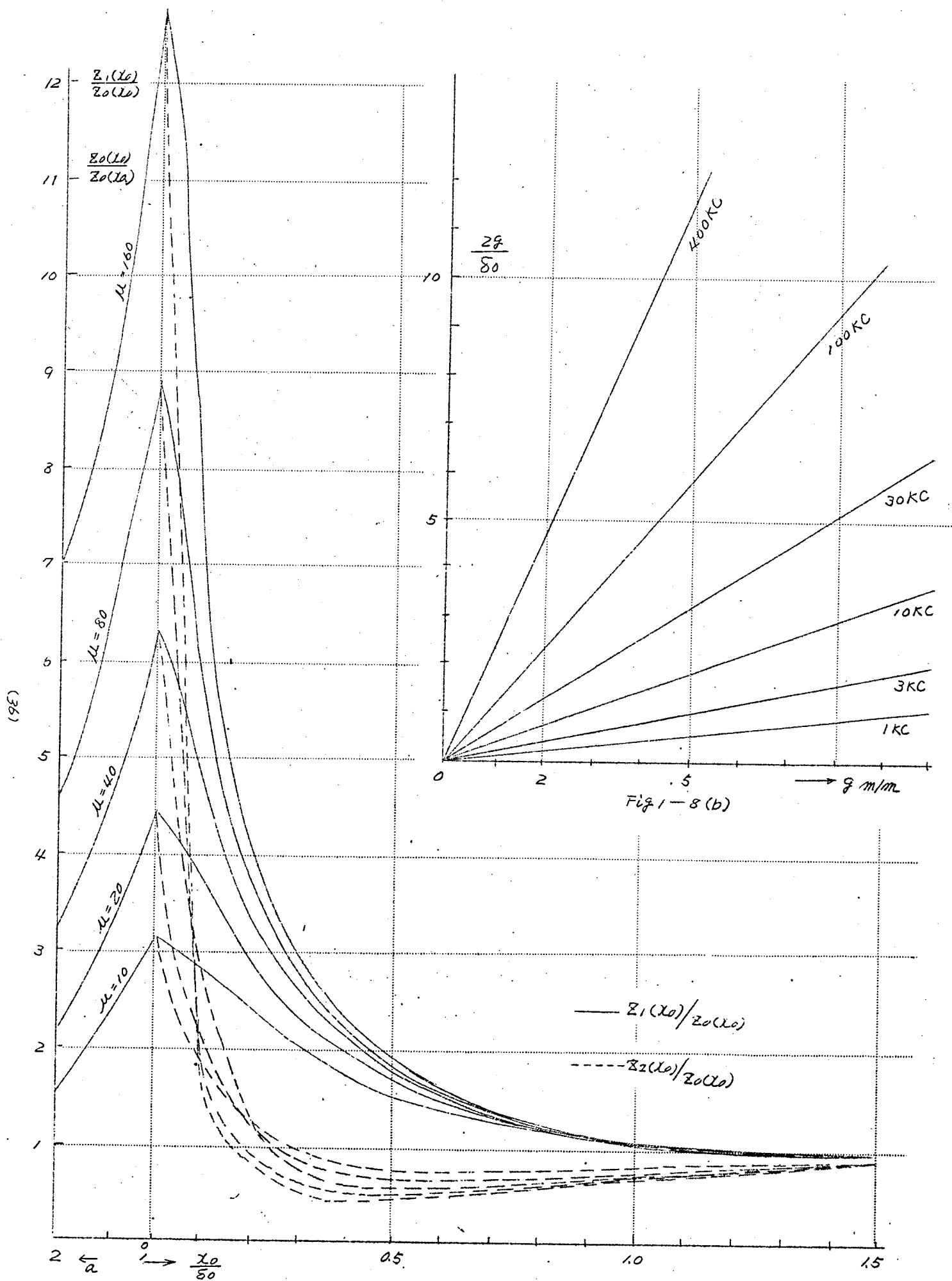
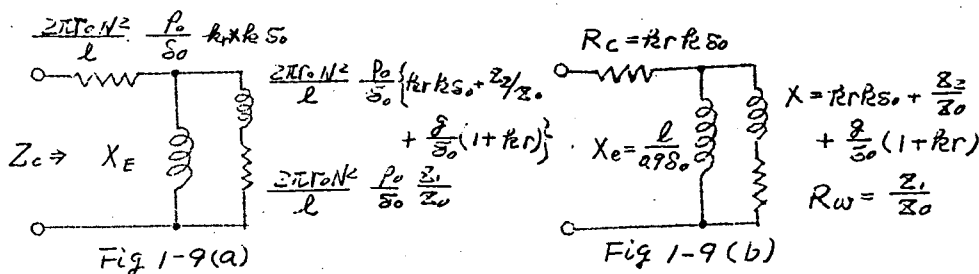


Fig 1-8 (a)





以上は加熱コイル及被加熱体を無限長として扱ったものであるが加熱コイルが有限長の場合は外部磁路に関する補償が必要であって、この為 Fig 1-9 (a) に示す等価回路及び次の (1.27) 式で与えられるリアクタンスを採用する。

(R.M. Barer; Applications and Industry, AIEE No29 1957)

$$\left. \begin{aligned} X_E &= \frac{8\pi^2 f N^2 \cdot 10^{-9}}{R_E} \\ R_E &= \frac{1.8}{2\pi r c} \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

(1.26) 式による簡易式を用いて、この場合の等価インピーダンス  $Z_c$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} Z_c &= \frac{2\pi f N^2}{l} \frac{P_0}{S_0} \frac{1}{\left(\frac{R_w}{X_e}\right)^2 + \left(1 + \frac{X}{X_e}\right)^2} \left\{ R_w + j \left( X + \frac{R_w^2 + X^2}{X_e} \right) \right\} \\ X_e &= \frac{l}{0.9 S_0} \\ R_w &= \frac{Z_1(l_0)}{Z_0(l_0)} \\ X &= \frac{2g}{S_0} + \frac{Z_2(l_0)}{Z_0(l_0)} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

特に変化する項を等価的に示せば Fig 1-9(b) の如くなる。

Fig 1-10(a)~(d) 及び Fig 1-11(a)~(d) は夫々  $N=10$  KC,  $\mu=20$ ;  $f=400$  KC,  $\mu=80$  として各々加熱コイルと被加熱体間の空隙  $g=0, 2, 5, 10$  (mm) に対して加熱コイル長  $l=10, 40$  (mm) とせる場合の抵抗分及びリアクタンス分の変化の様様を (1.28) 式より計算図に示せるもので、図に於ける縦軸  $R, X$  は

$$R = \frac{R_w}{\left(\frac{R_w}{X_e}\right)^2 + \left(1 + \frac{X}{X_e}\right)^2} \quad X = \frac{X + \frac{R_w^2 + X^2}{X_e}}{\left(\frac{R_w}{X_e}\right)^2 + \left(1 + \frac{X}{X_e}\right)^2}$$

である。尚、(1.28) 式は加熱コイルの抵抗を 0 として居る事を断っておく。

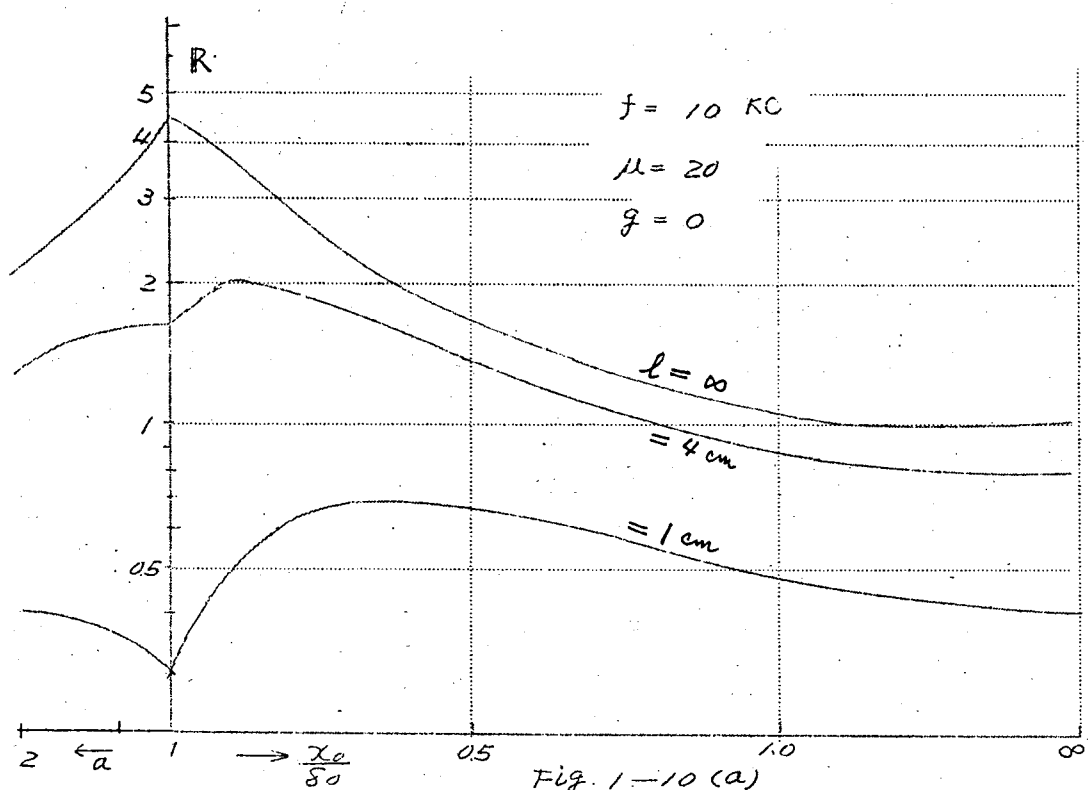
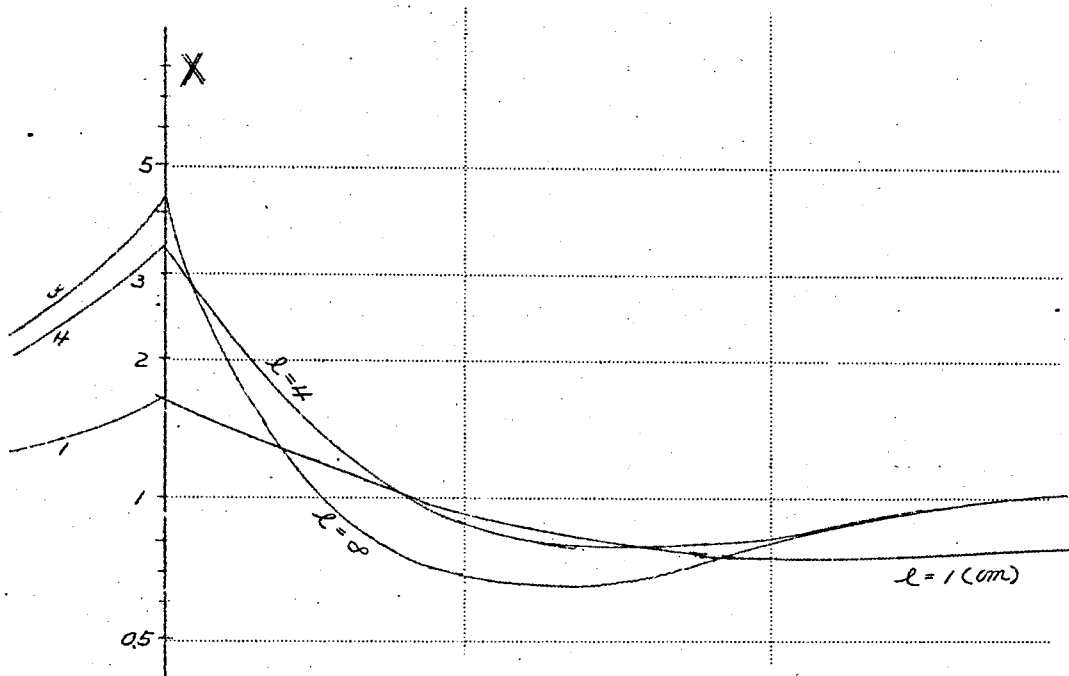


Fig. 1-10 (a)

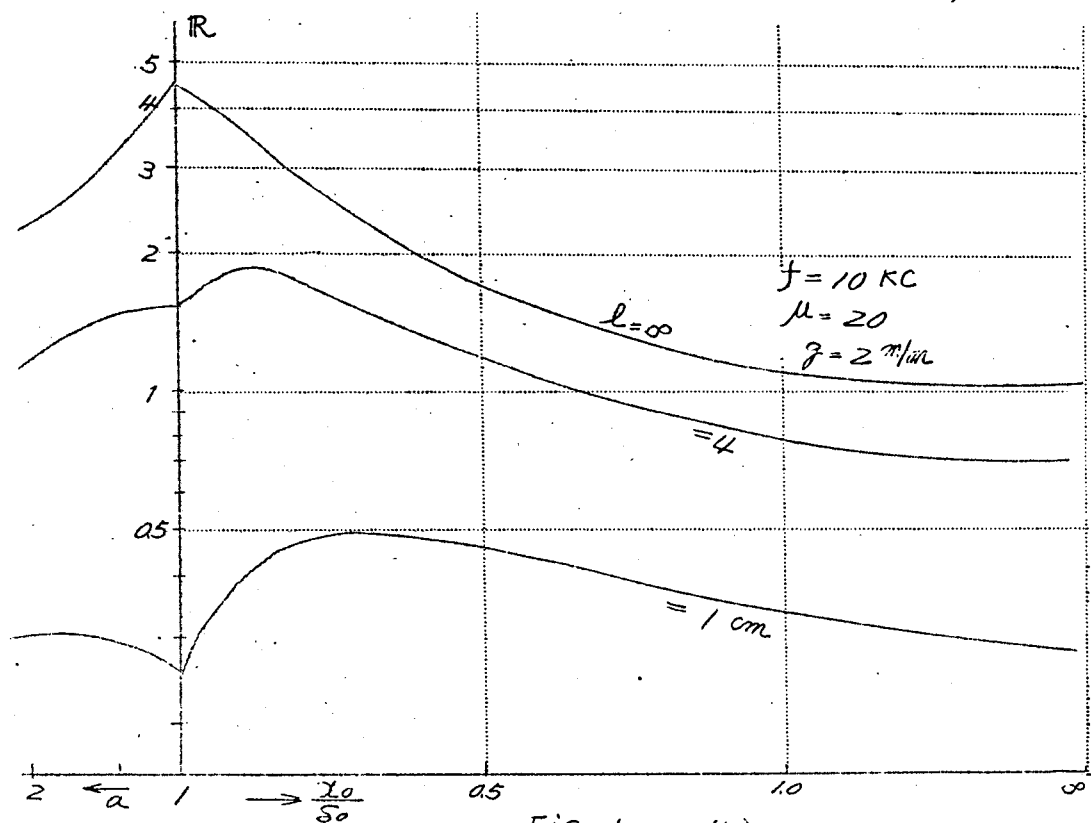
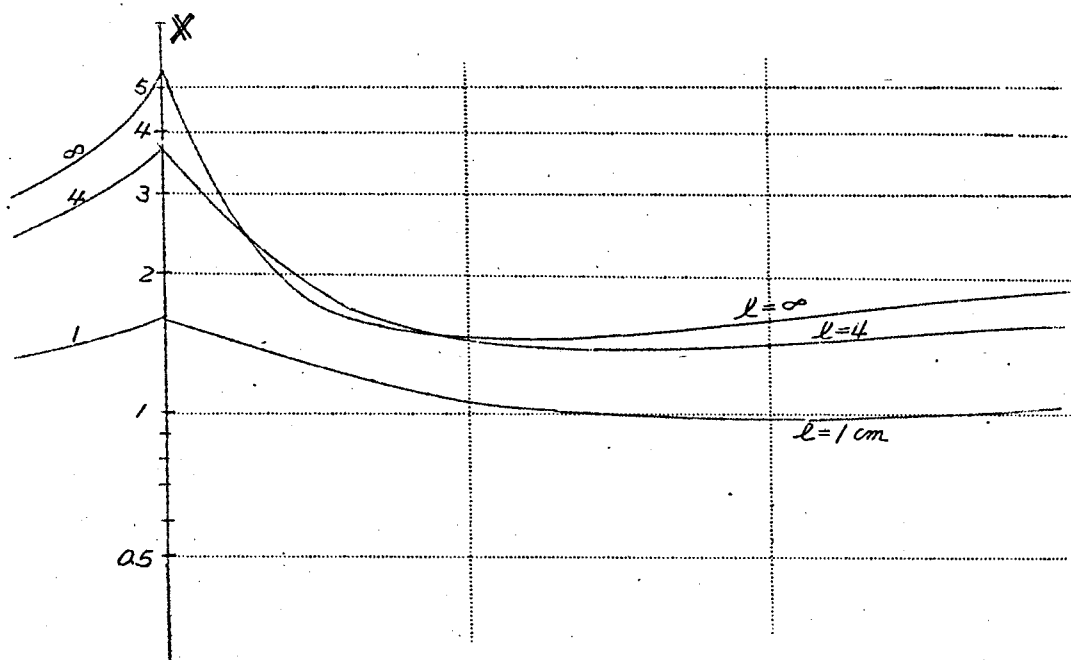


Fig 1-10 (b)

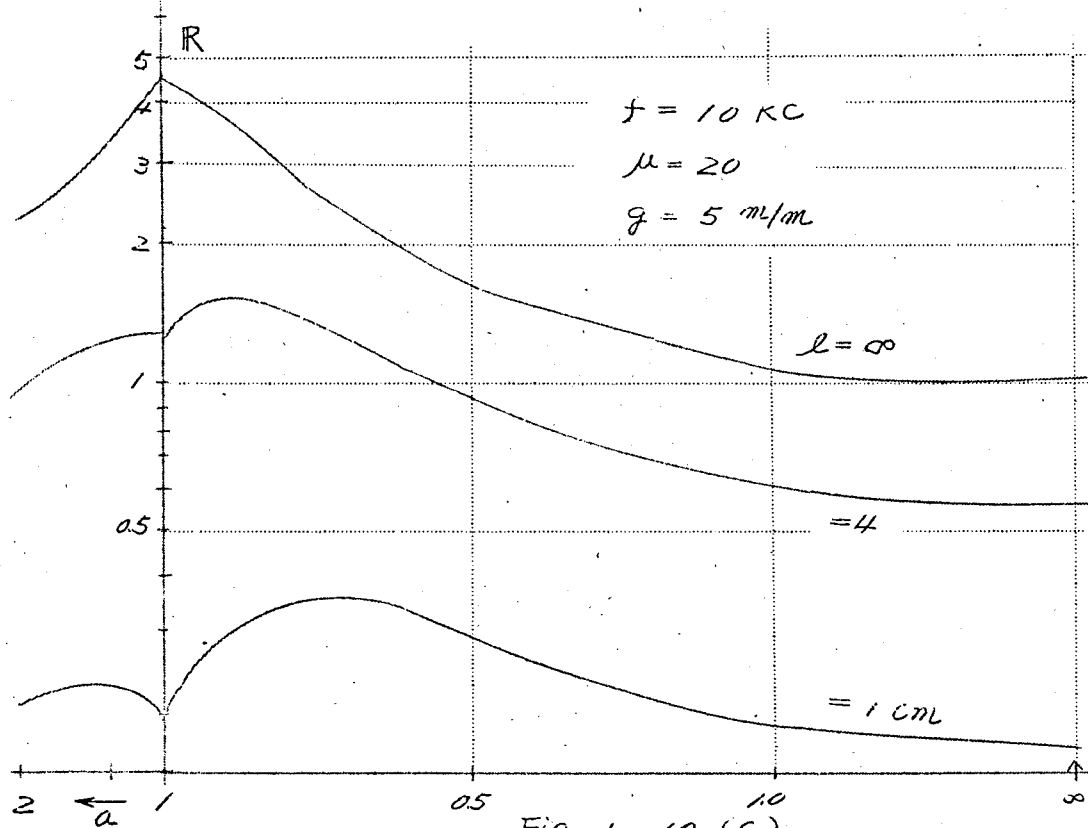
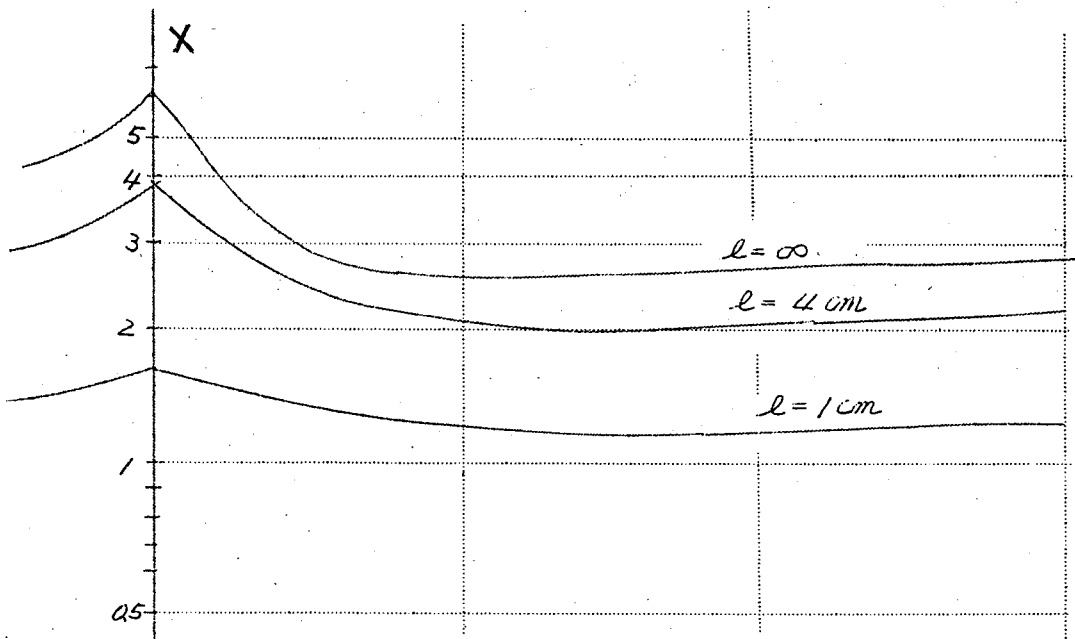


Fig. 1-10 (C)

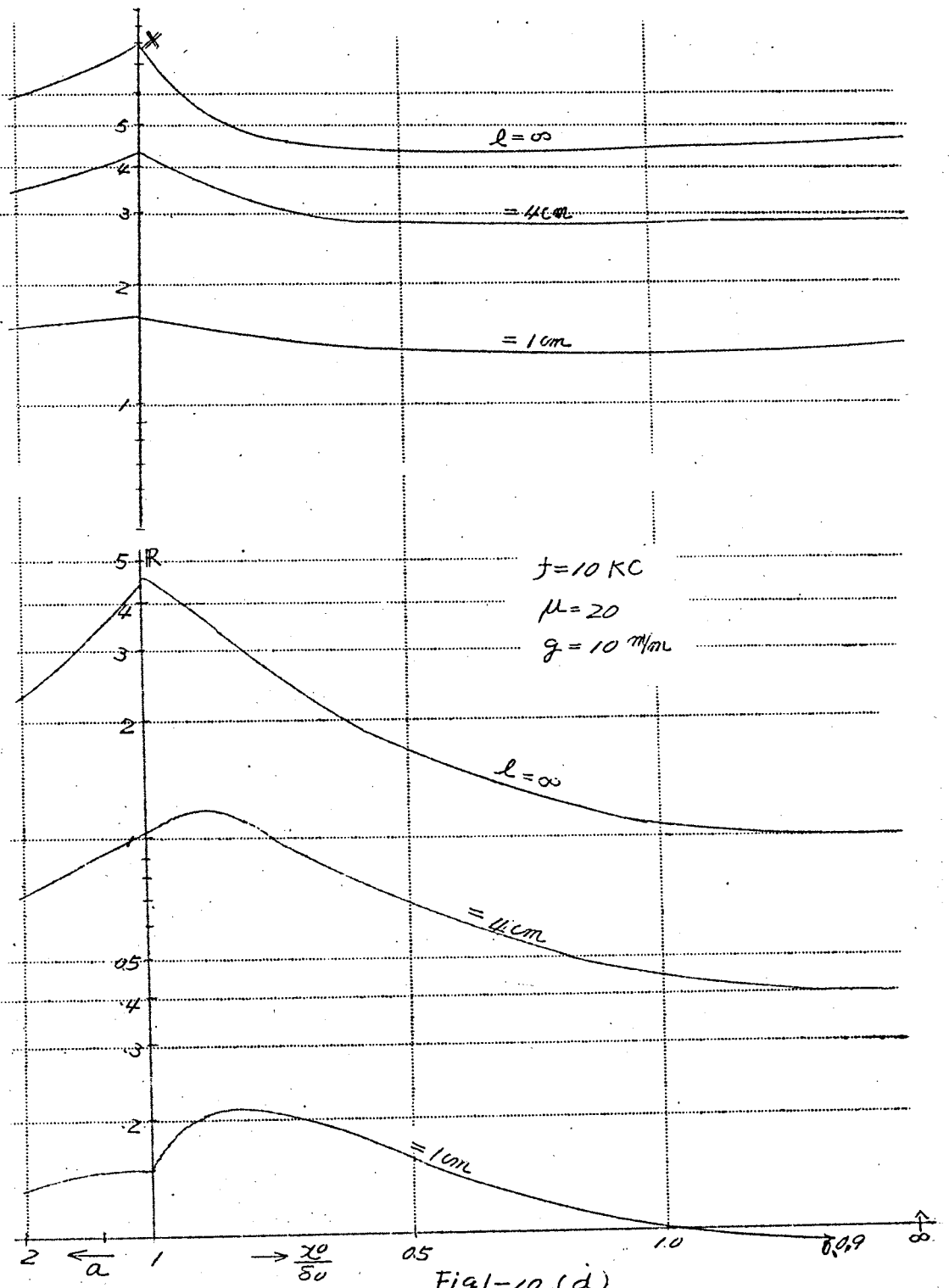


Fig 1-10 (d)

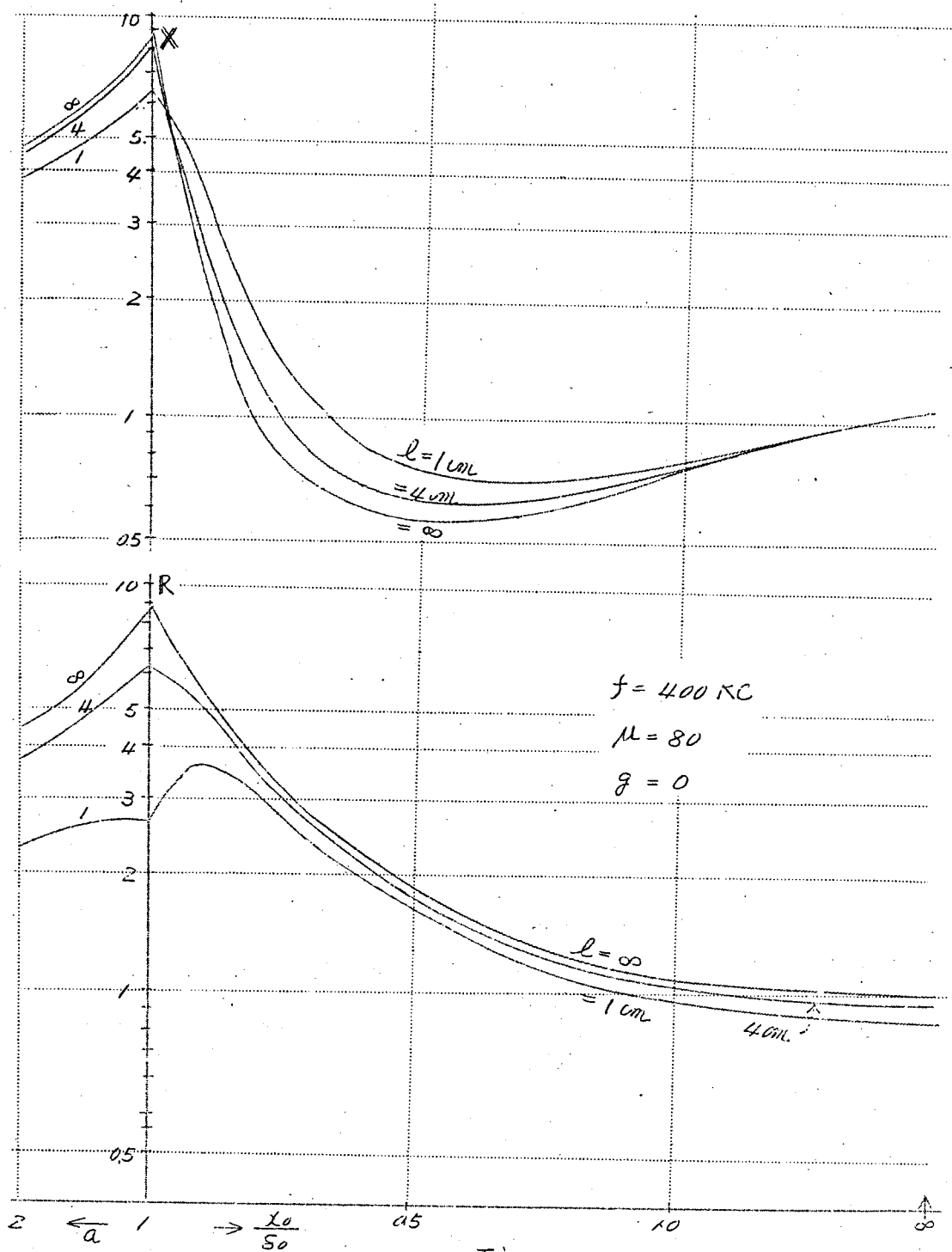


Fig 1-11(a)

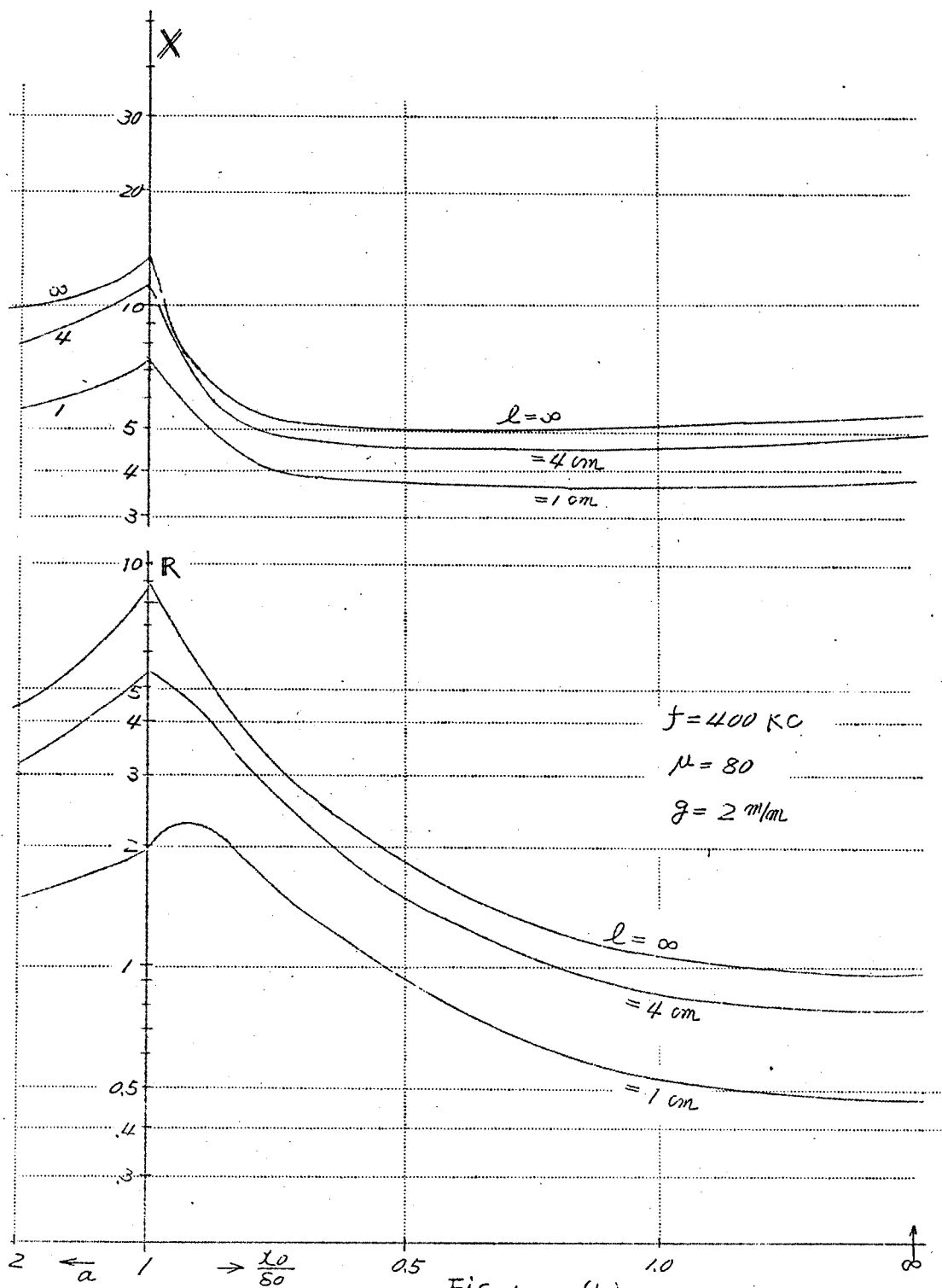


Fig. 1-11(b)

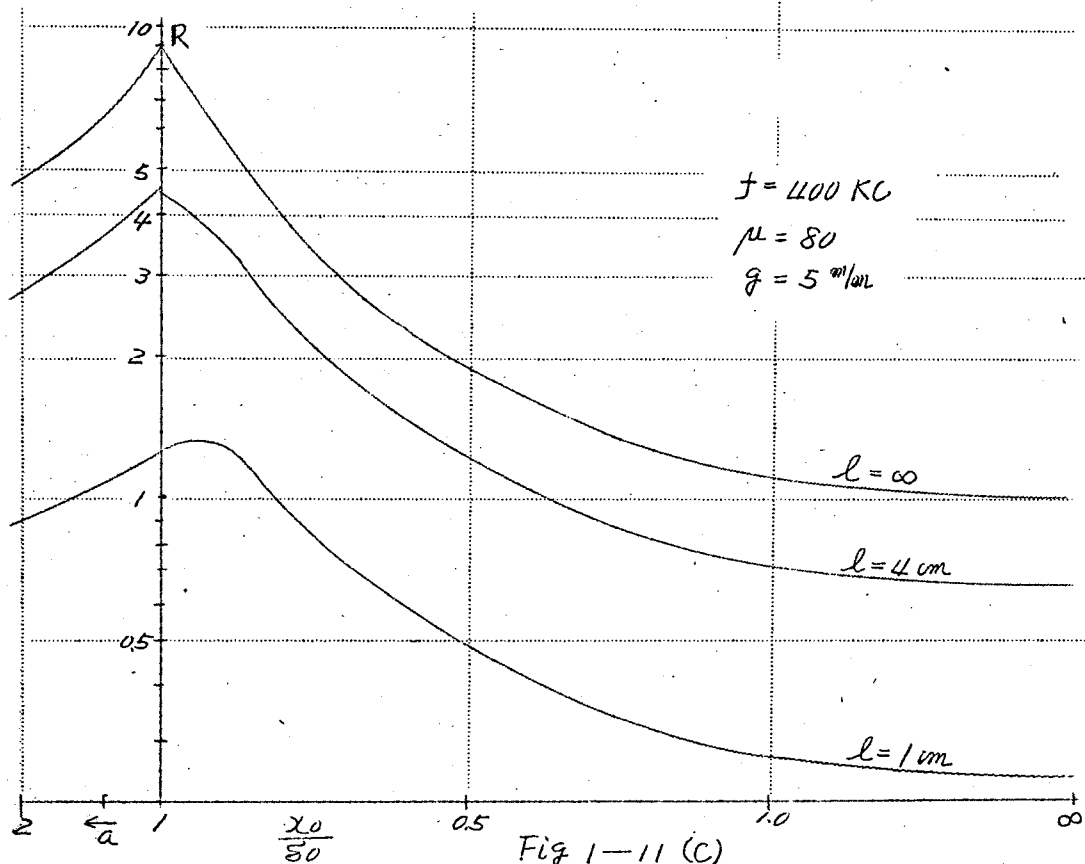
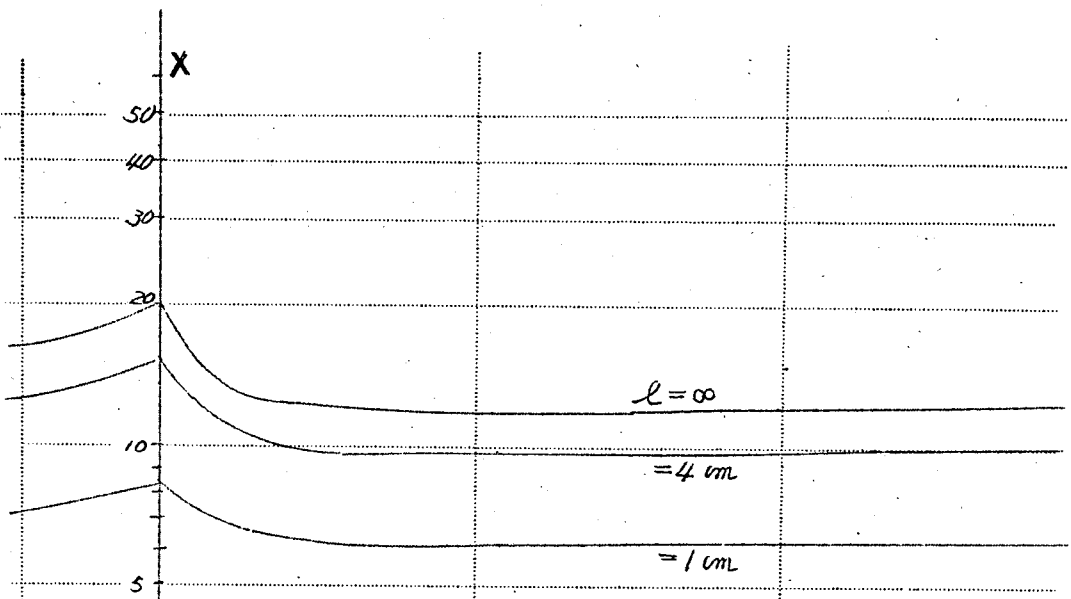


Fig 1-11 (C)



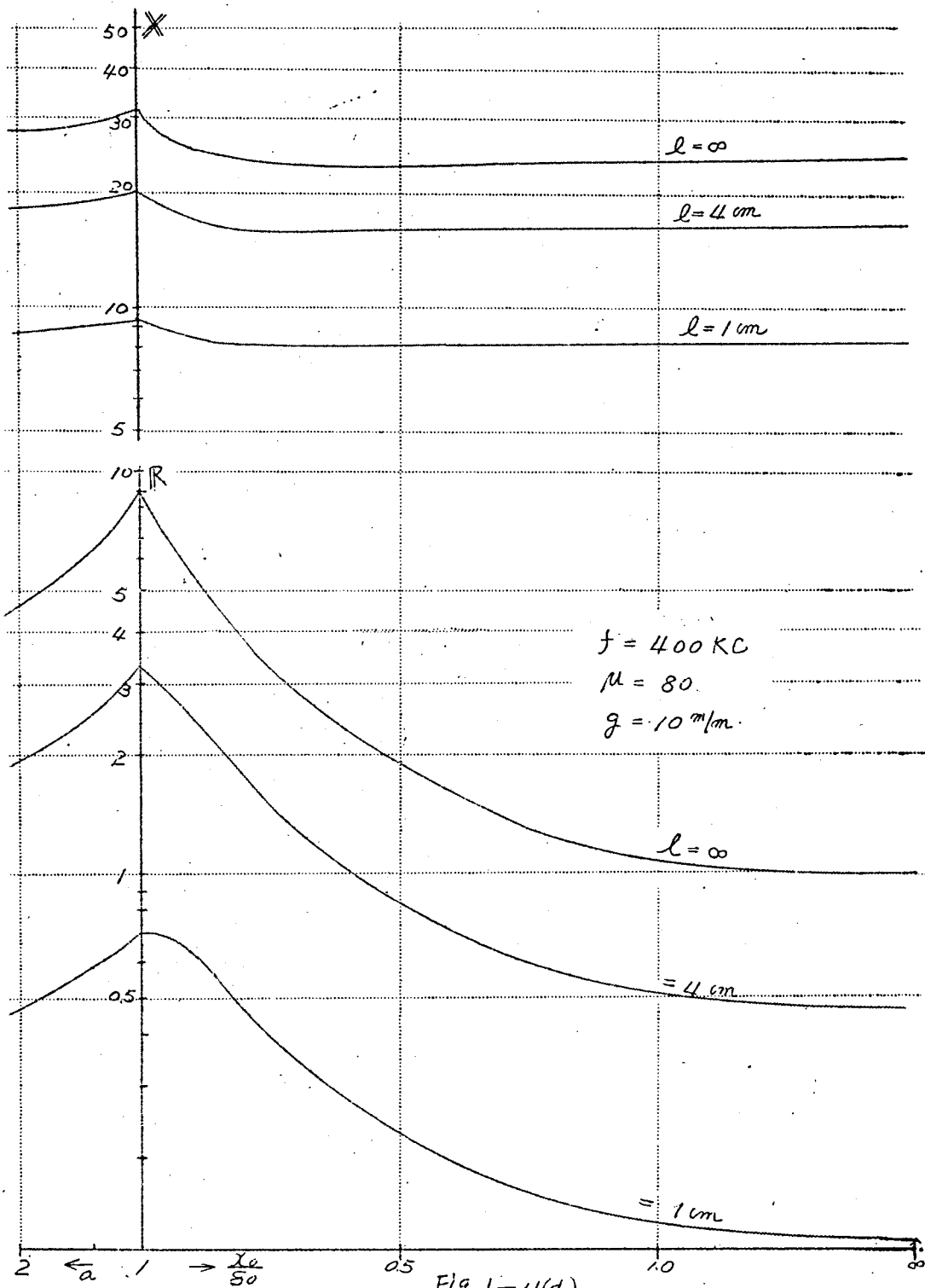


Fig 1-11(d)

# (vi) 力 率

Fig 1-10 ~ Fig 1-11 に示した例につき力率を求めると、  
 Fig 1-12 (a) ~ (d) 及び Fig 1-13 (a) ~ (d) に示す如くなる。  
 尚、低力率負荷については  $Q = \omega L / R$  なる  $Q$  値を用いて取扱  
 い上便利な場合が多いが、力率と  $Q$  値の間には次の関係がある。

$$Q = \frac{\sqrt{1 - (P.f.)^2}}{P.f.}$$

$$= \frac{1}{P.f.} \quad (\text{低力率の場合})$$

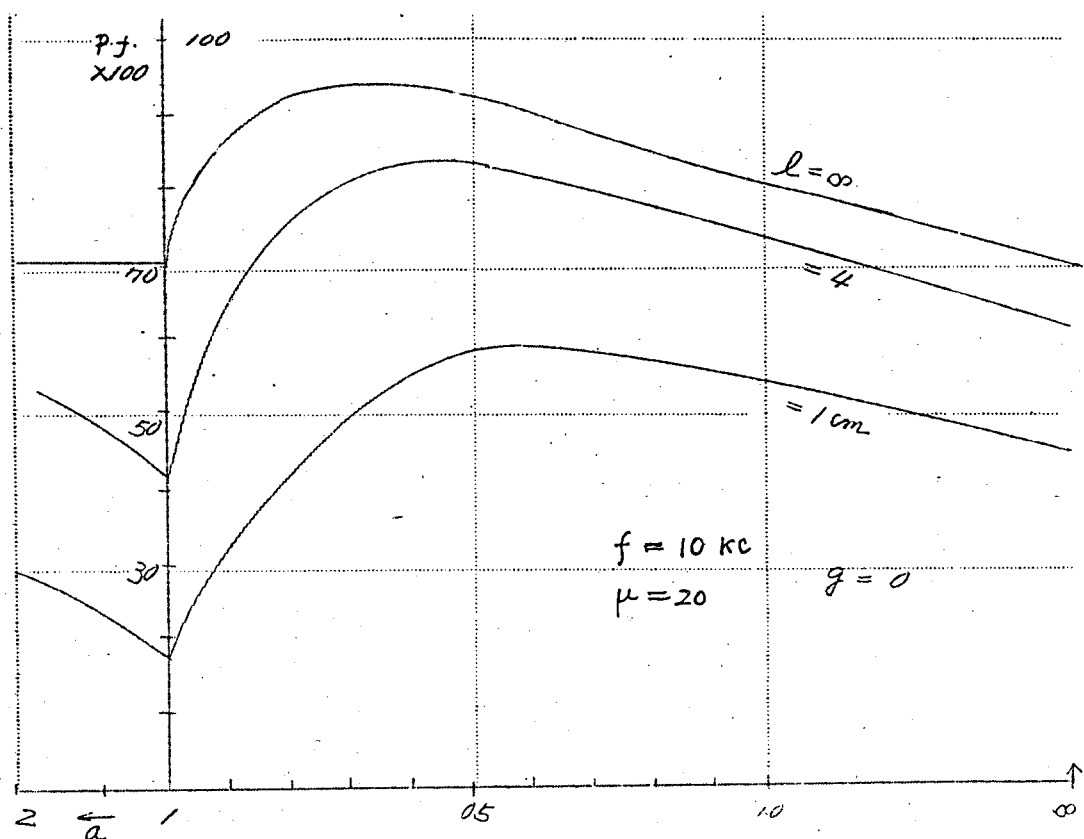
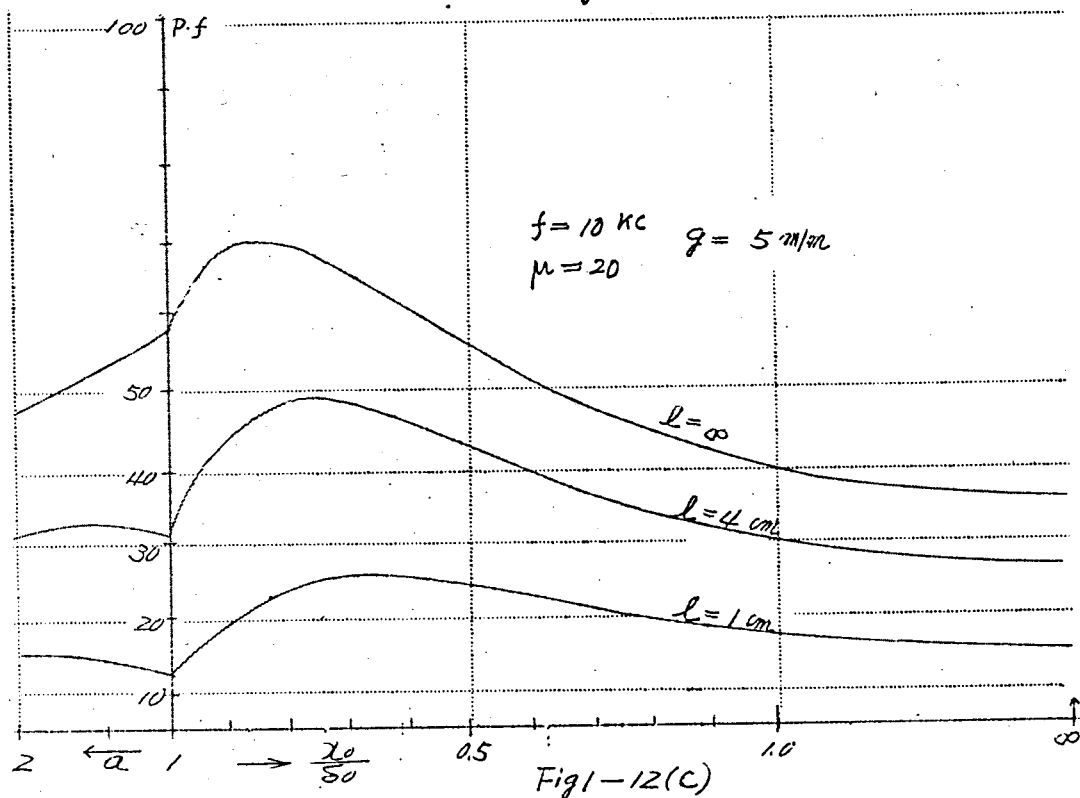
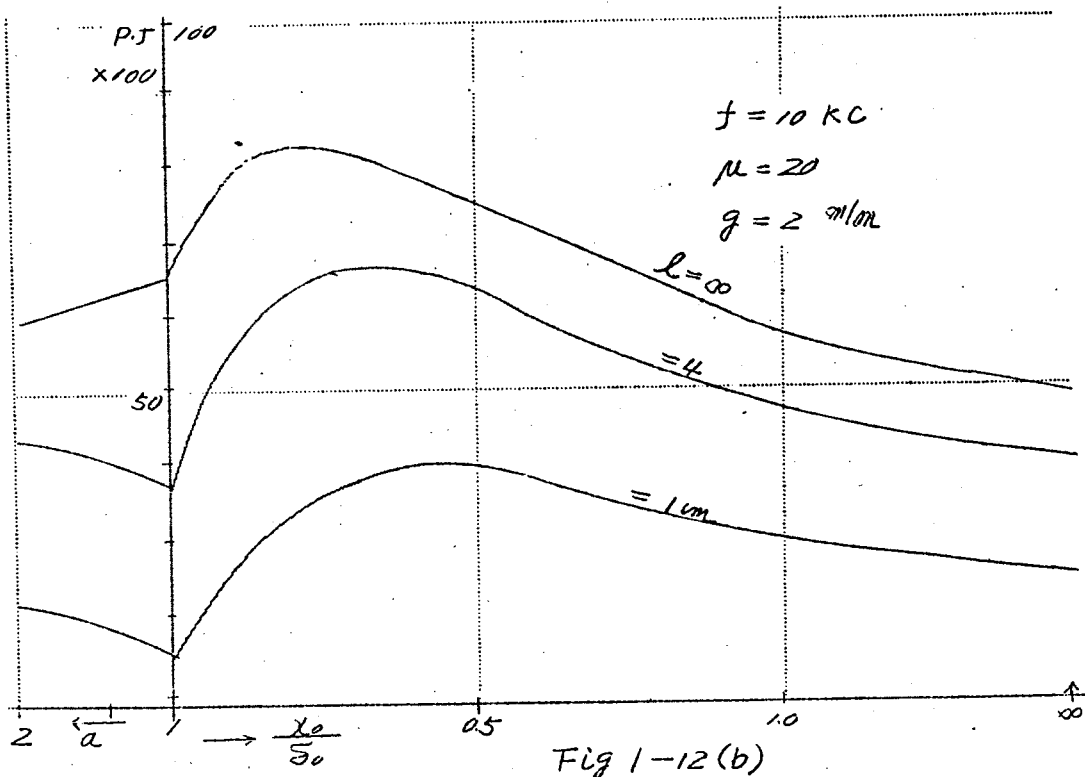
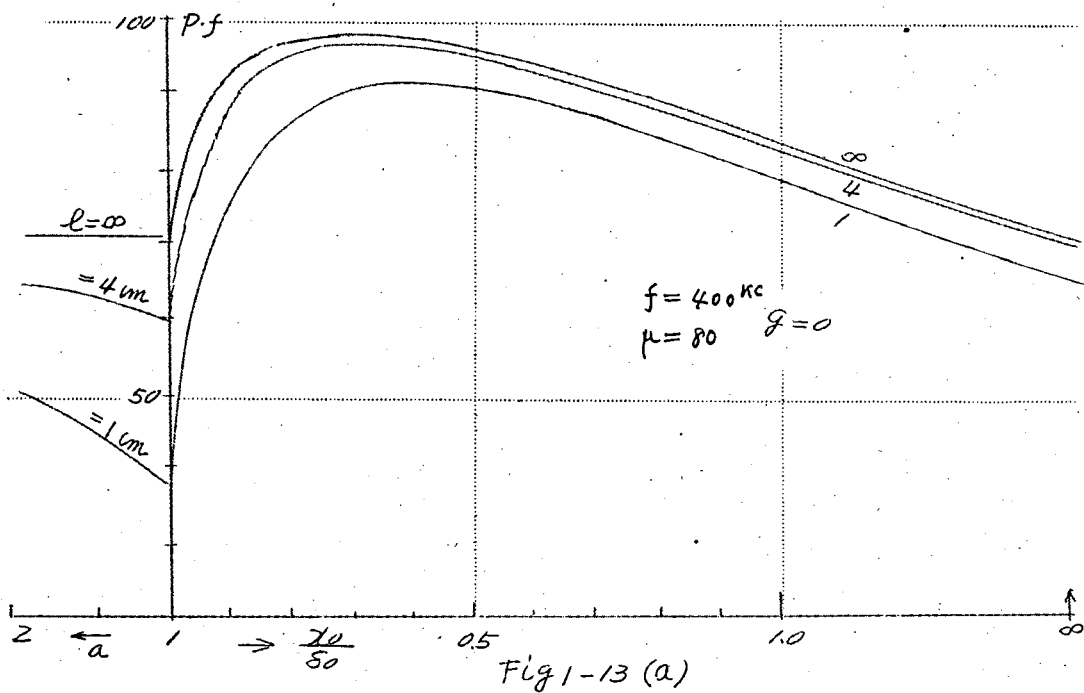
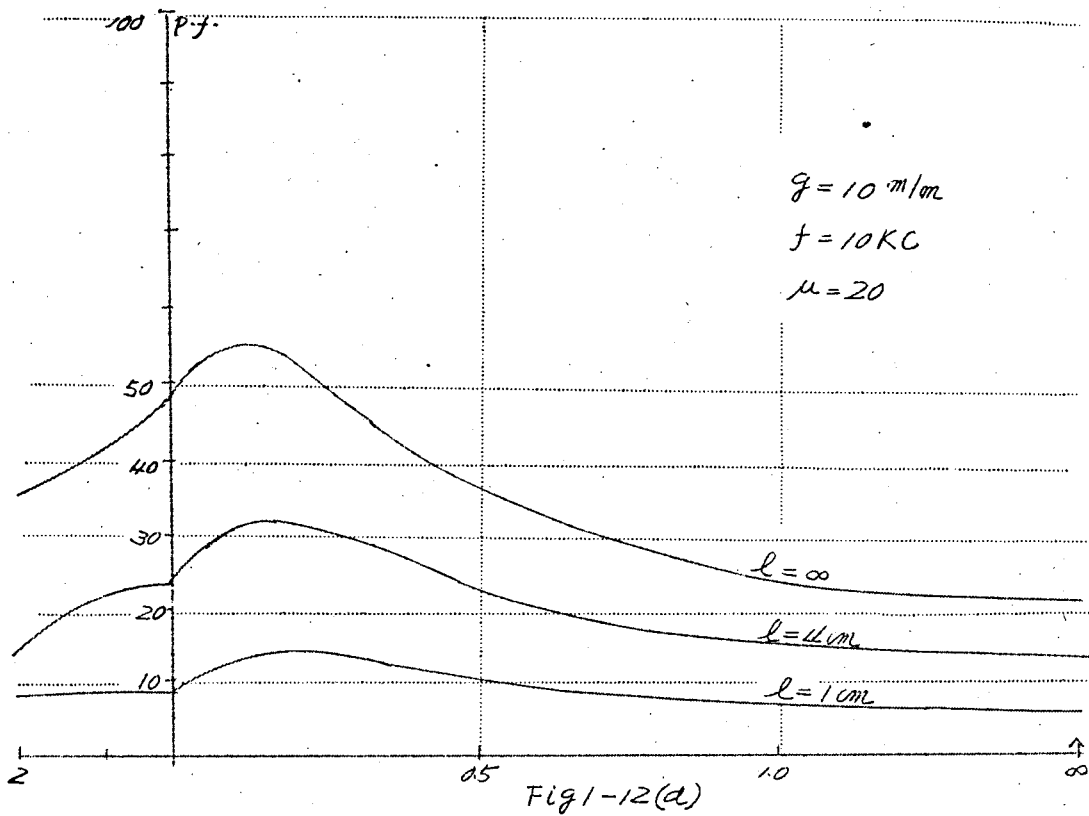


Fig 1-12(a)





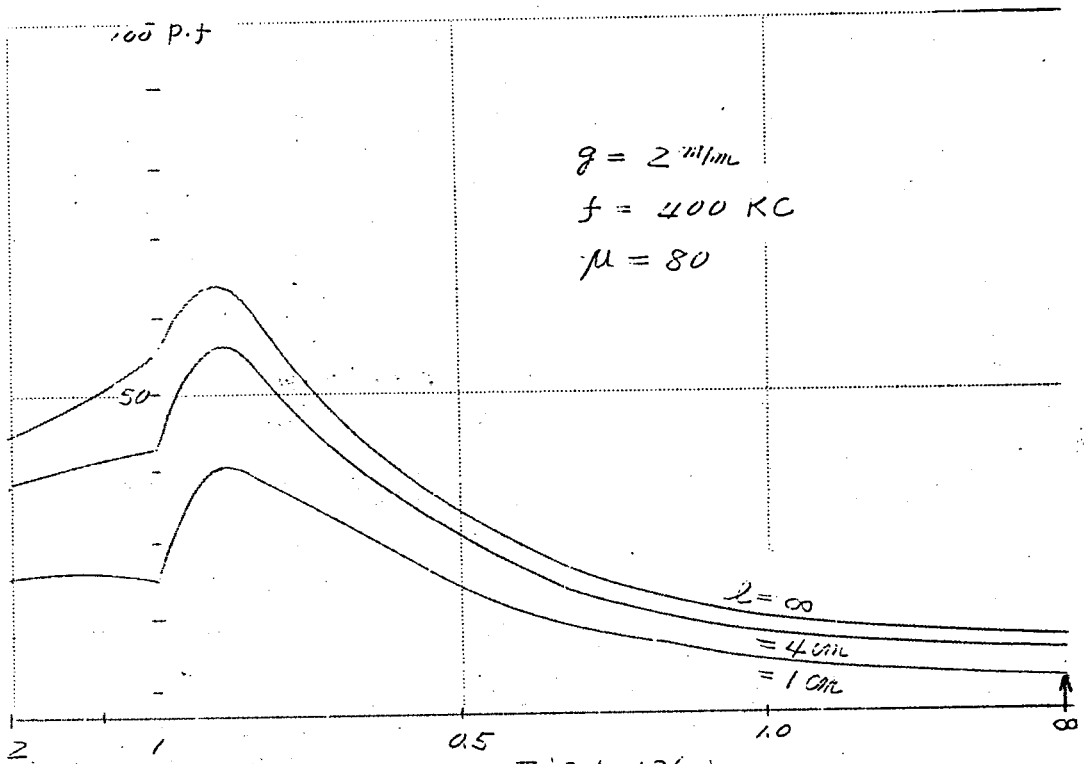


Fig 1-13(b)

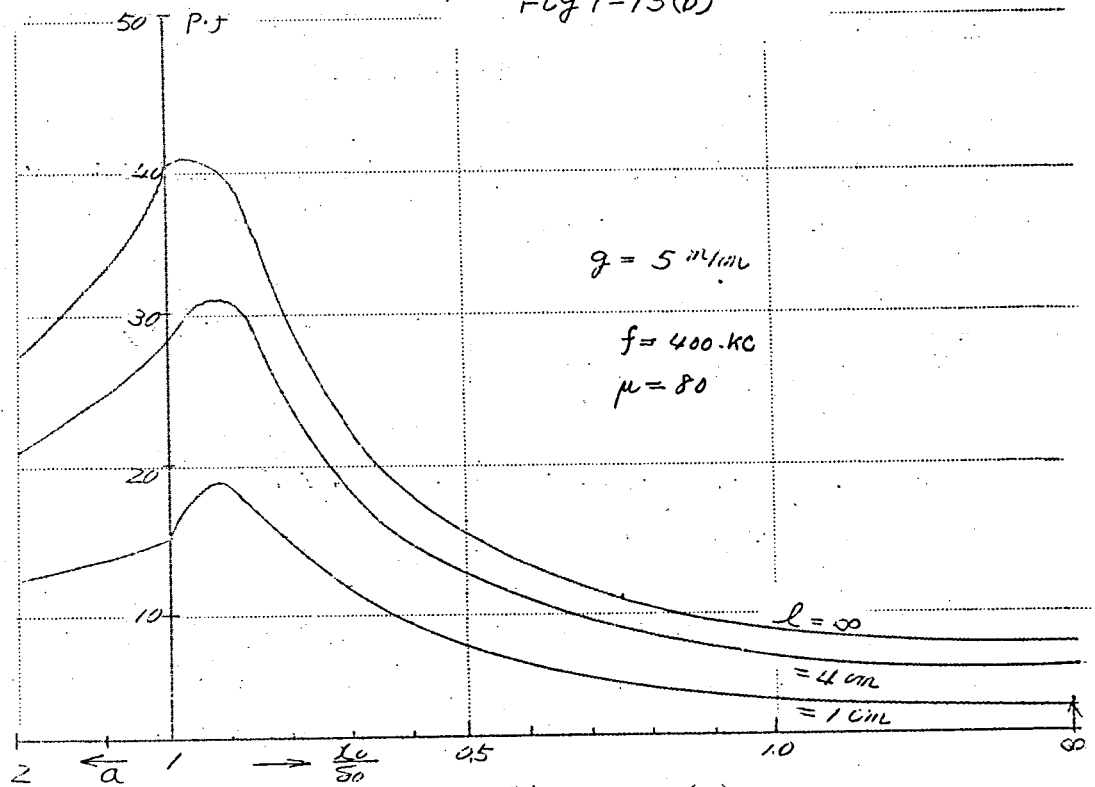
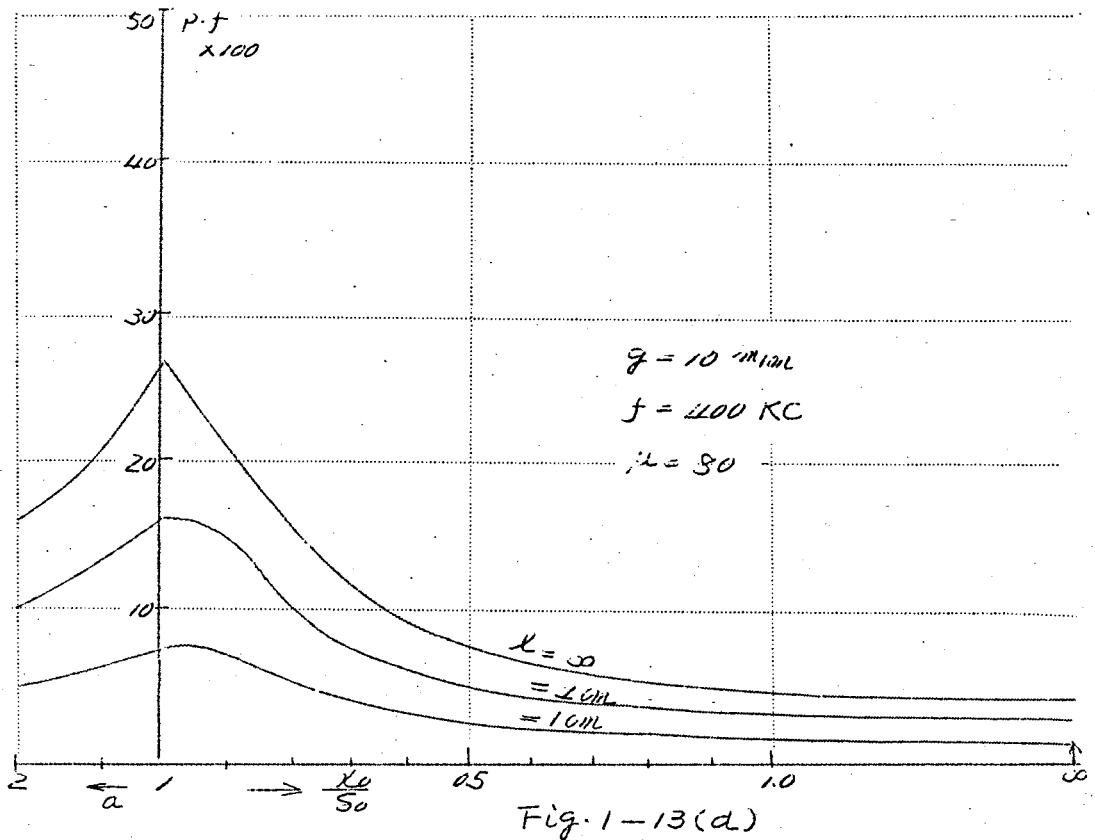


Fig 1-13(c)



(VII) 加熱能率

Fig. 1-7 に示す等価回路と、(1.28)式によって加熱コイルの能率を求めるに、 $t_r = 1$  とすると

$$\eta = \frac{R}{R + R_{S0}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{----- (1.29)}$$

$$R = \frac{R_w}{\left(\frac{R_w}{X_L}\right)^2 + \left(1 + \frac{X}{X_L}\right)^2}$$

$$P_c = 2 \times 10^{-6}, \quad P_0 = 120 \times 10^{-6} \quad \Omega_{\text{cm}} \text{ とすれば}$$

$$R_{S0} = \frac{\delta_c}{\delta_0} = 0.129$$

$t_{S0} = 0.129$  として前例の場合と (1.29) 式によって計算すると Fig. 1-14 (a) ~ (d) 及び Fig. 1-15 (a) ~ (d) に示す如くなる。 $t_r = 1$  としている為、正確に各瞬時の加熱コイルの能率を表わしてはいないが、その概略は察知出来る。

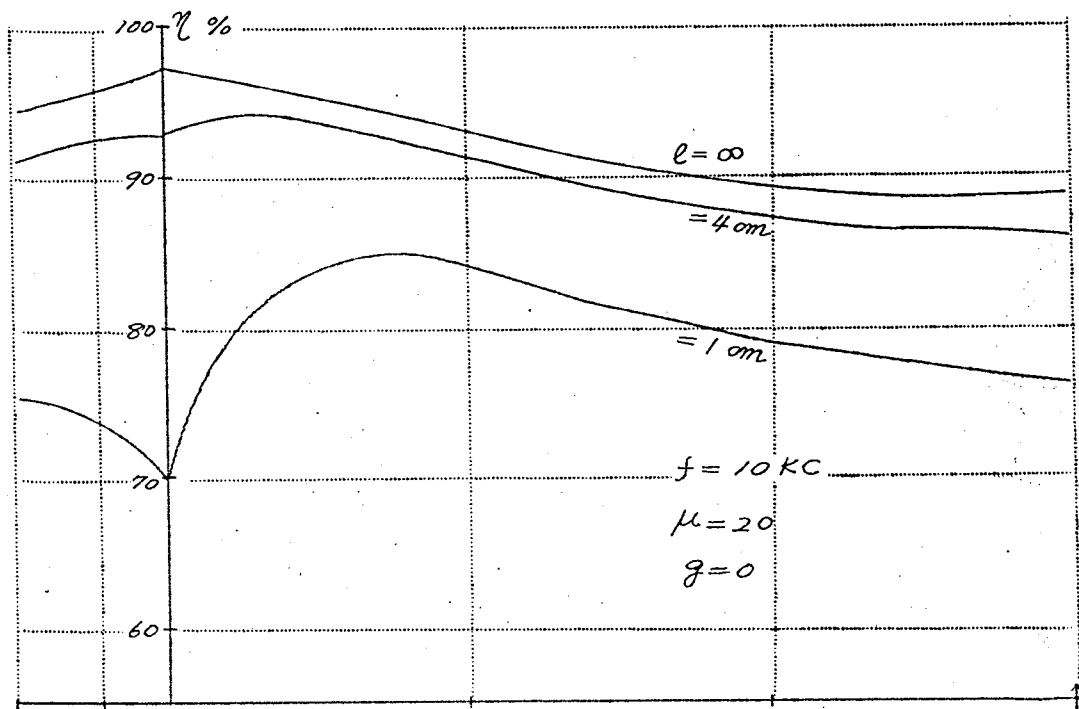


Fig. 1-14 (a)

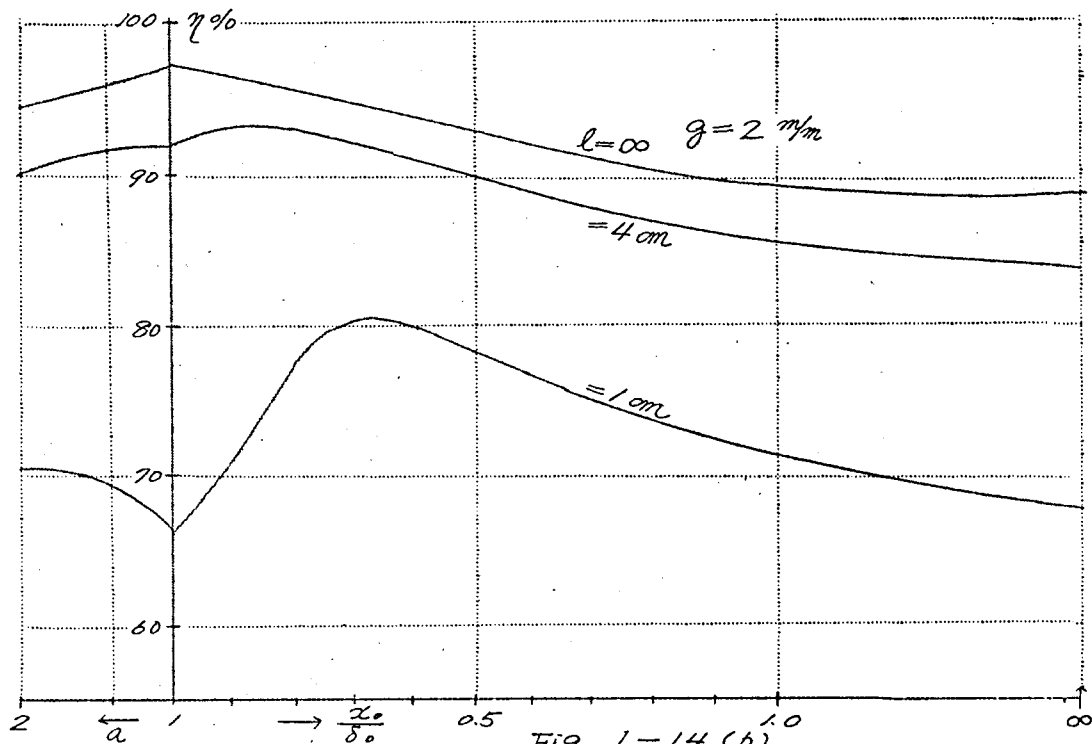


Fig. 1-14 (b)

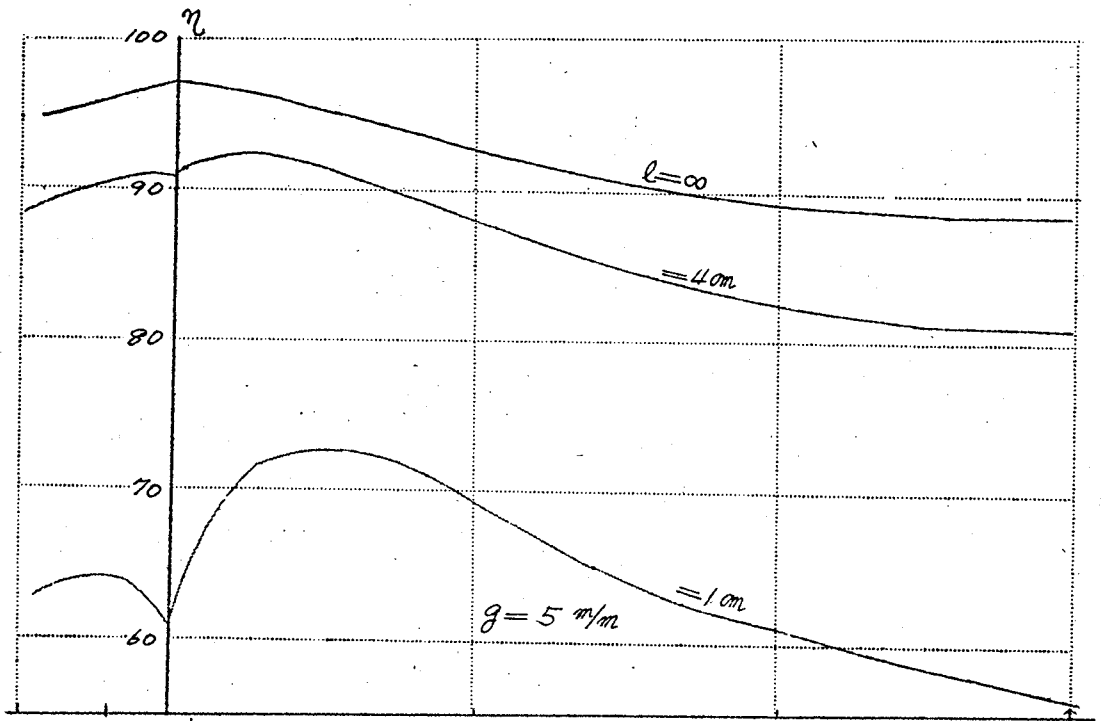


Fig. 1-14 (c)

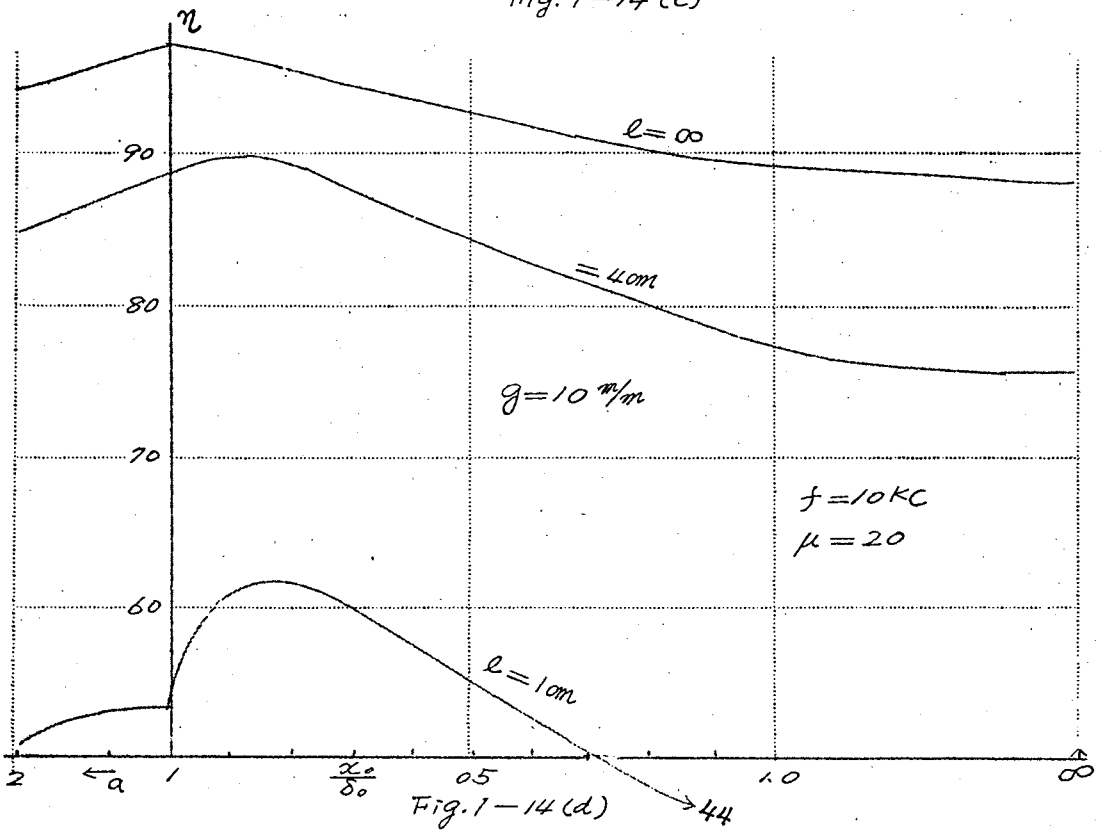


Fig. 1-14 (d)



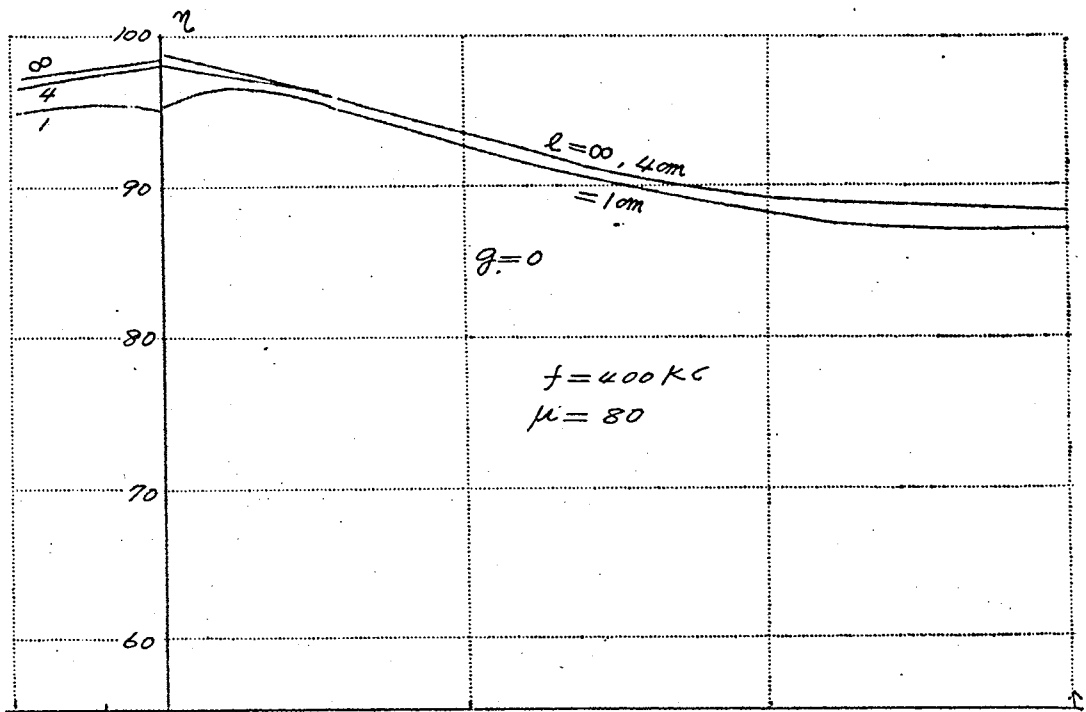


Fig. 1-15(a)

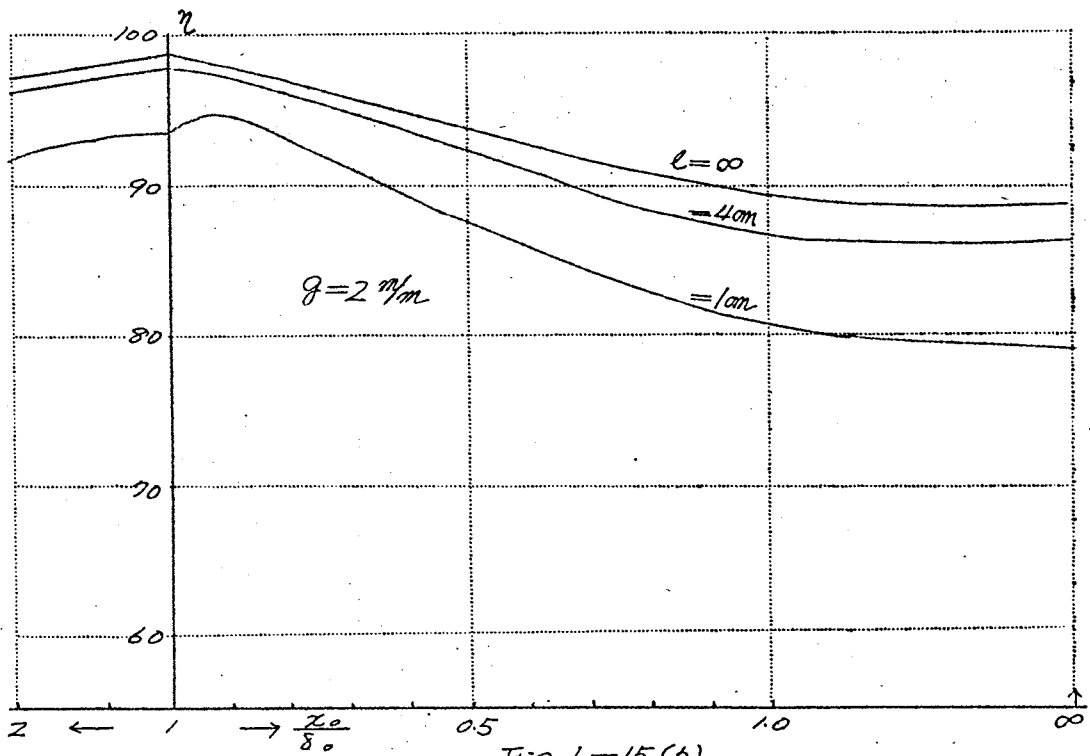


Fig. 1-15(b)

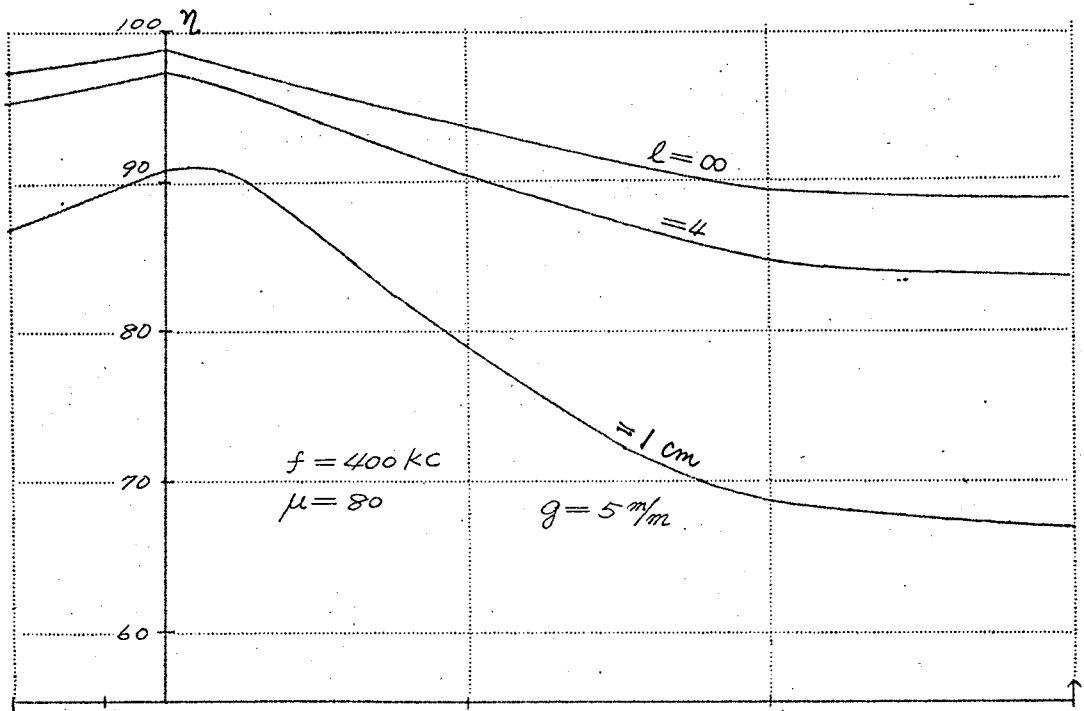
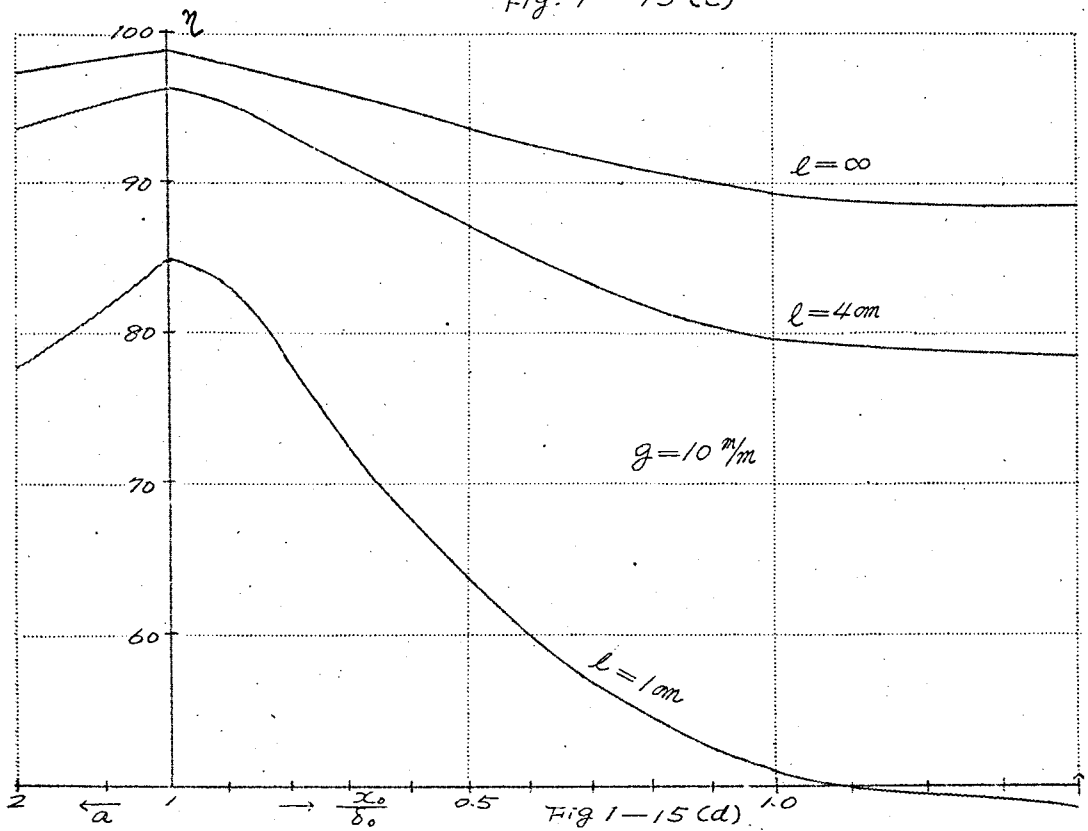


Fig. 1-15 (c)



## 1.5 結 び

従来誘導加熱に関する電氣的計算式は多くの人々によつて導かれて居るが、その多くは誘導加熱一般に通ずる算式に止り、高周波焼入の爲の解析であつても、ヤゝもすれは加熱コイルを電源に接続する上に必要な事項のみに止り、加熱に於ける熱源としての分析に欠けていた。本章に於ては特に加熱に対する熱源として立場から解析し、被加熱体内に於ける電力密度の分布、等価電力深度、単位表面積当りの電力等に関する簡単な計算式を導き、又それらにつき広範な計算例を示した。

一方加熱コイルの負荷力率は低く、且、加熱の進行と共にインピーダンスも変化するので、これを高周波電源に接続する上に向難が多い。特に真空管発振器のやうな場合にはその発振に關係し、インピーダンスの変化によつて発振電圧も変化し、従つて加熱電力はその面からも影響されるので加熱コイルの負荷インピーダンスの変化する模様につき、本章当初の仮定に基き計算図示によりその大綱を明かにした。

本章の計算に用する仮定については、磁気変態吳温度以下に於ても被加熱体内の温度勾配を考慮して二層媒質として扱つた方がより妥当であるが、表面層が磁気変態吳に達した以後に於けるものに比してその電力深度は非常に薄いので熱源としての見地からは左程重要ではなく、又そのインピーダンスも単一媒質とせる場合と大差はない。更に全加熱期間を通じて、即ち表面層が形成された右の芯部に於ける導磁率も単一媒質時と同一導磁率の値として計算を進めて居るが、計算例にも散見されるやうに $\mu$ の影響はそれ程大きくはない。従つてこれらの仮定も充分とは云えないとしても、従来の計算式でなされた仮定よりは充分合理的であり、且、計算式も単純される利吳が生じた。

## 第 2 章 電 流 変 成 器

高周波焼入の電気回路には多くの場合電流変成器が使用される。その目的とする所は

i. 加熱コイルを高周波電源に直結する場合には、加熱コイルは電流変成器の一次二次捲線比に相当する多重捲とせねばならない。而して加熱に伴う被加熱体の膨脹による間隙の實質的縮小と、加うるに被加熱体周辺の雰囲気温度上昇による熱解離化とによつて加熱コイルと被加熱体向に火花放電を生じ易くなる。かくて極端なる多重捲加熱コイルは同一仕様による比較的捲線数の少いか、或は単捲加熱コイルに比して被加熱体との間隙を大きくせねばならず、この事は効率及び力率の点から不経済である。

ii. 高周波焼入は局部加熱の場合が多く、この点からも間隙を大きくする事は不利であり、又極端なる多重捲が不可能な場合もある。加熱コイルは、加熱だけでなく、加熱終了後は焼入用冷媒槽の案内となる場合も多々あり、その点取扱の点を含めて構造上極端なる多重捲の採用し難い場合が多い。

iii. 前記(i)及び(ii)の項は加熱コイルの構造上及び取扱上の便宜に因する一種の整合装置として電流変成器を見る事が出来るが、空心電流変成器の場合には更にもう一つの整合的意味がある。即ち電流変成器は電磁的には漏洩磁束と励磁磁束に分けられるがこれらは等価回路的には夫々漏洩インダクタンス及び励磁アドミッタンスとなる。電流変成器を加熱コイルに接続した場合、前者は加熱コイルの空路リアクタンスを増大したと同一性格を有し、後者は加熱コイルの外部磁路に因する補償用側路リアクタンスと同様な意味を持つ。従つて後者の側路リアクタンスは加熱進行に伴う加熱コイルのインピーダンスの変化を抑制する事になるので、電源よりすれば比較的安定せる電力を供給し易くなる。この事は負荷インピーダンスを発振用タンク回路構成

上に於てそのリアクタンス素子の一部に含ませるやうな真空管式自励発振器に於ては特により安定な発振と電力の供給に役立つ。

電流変成器は以上のやうな意義をもつものであるが、励磁電流が負荷電流に比して大きくなるやうな場合、或は加熱コイルの負荷インピーダンスが一般に低いので電流変成器の漏洩リアクタンスと対比出来るやうな場合は相当な損失を発生するので、こゝでは効率を中心に検討する。

## 2.1 空心電流変成器の等価回路

適用周波数が20KC以上の場合にはその電源として真空管式自励発振器を使用する事が多く、かゝる場合には負荷を含めて電流変成器は発振用タンク回路のインダクタンス素子の一部として兼用されるので、その効率は一層高くする必要がなく、空心の電流変成器が使用される。

一般に高周波焼入に使用される電流変成器は単層円筒形の一次コイルを内側にし、外側に単巻或は一次に比して比較的少い巻回数のバندوق型コイルを二次とせ

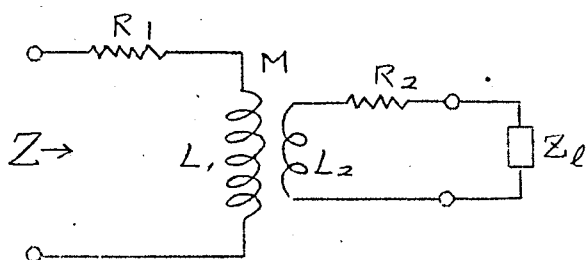


Fig 2-1

るものが多い。一次及び二次巻線の抵抗及びインダクタンスを夫々 $R_1$ ,  $L_1$ ;  $R_2$ ,  $L_2$  とし、その巻線比を $n$ 、相互インダクタンスを $M$ とする。即ちFig. 2-1に示される如くとし、 $Z_L = R_L + j\omega L_L$ とすると一次端子より見た等価インピーダンス $Z$ は

$$Z = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 (R_2 + r_e)}{(R_2 + r_e)^2 + \omega^2 (L_2 + L_e)^2} + j\omega \left\{ L_1 - \frac{\omega^2 M^2 (L_2 + L_e)}{(R_2 + r_e)^2 + \omega^2 (L_2 + L_e)^2} \right\} \quad (2.1)$$

$L'_1$  及  $L'_2$  を夫々一次及二次コイルの漏洩インダクタンスとすれば

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L'_1 + L''_1 \\ L_2 &= L'_2 + L''_2 \\ M^2 &= L'_1 L'_2 = k^2 L_1 L_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(2.2) 式を用いて (2.1) 式を変形すれば

$$Z = R_1 + j\omega L'_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L'_1} + \frac{1}{\frac{L'_1}{L'_2} \left\{ (R_2 + r_e) + j\omega (L'_2 + L_e) \right\}}} \quad (2.3)$$

(2.3) 式により  
等価回路を構成  
すれば Fig. 2-2  
に示す如くなる。

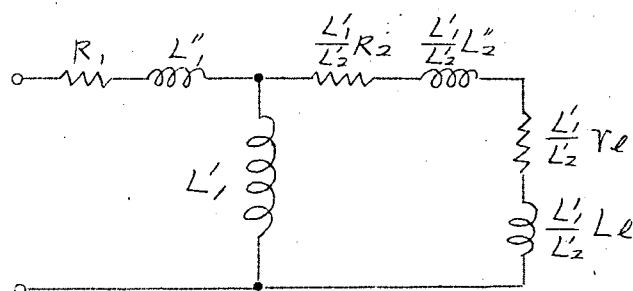


Fig. 2-2

多くの場合ニ  
次コイルは一次  
コイルに充分結

合するやうになって居るので、 $L''_1$  を 0 とすれば

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L'_1 \\ L_2 &= L'_2 + L''_2 \\ L'_2 &= k^2 L_2 \\ L''_2 &= (1 - k^2) L_2 \\ k^2 &= \frac{L_1}{L_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$\frac{\omega (L'_2 + L_e)}{R_2 + r_e} \gg 1$  とすれば一次端子より見た等価インダ

クタンス  $L$  は

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{n^2(L_2'' + L_e)}$$

$$\therefore L = \left(1 - \frac{k^2}{1+S}\right) L_1 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\text{但し} \quad S = \frac{L_e}{L_2} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

次に

$$Q_e = \frac{\omega L_e}{r_e}$$

$$Q_1 = \frac{\omega L_1}{R_1}$$

$$n^2 R_2 = K_{RT} R_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (2.7)$$

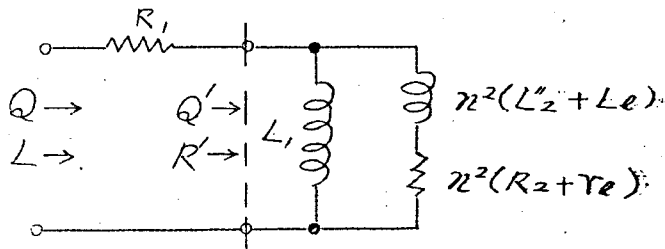
とおき、Fig 2-2

に示す回路を(2.4)

式に従ってFig 2-3

の如く書き改め、

この図によつて



次端子より見た負

Fig. 2-3

荷時の等価的Q値を算出すると、

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{\omega(L_2'' + L_e)}{R_2 + r_e} \frac{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)}{L_1} \\ &= \frac{\omega L_2(1+S)(1+S-k^2)}{k^2(R_2 + r_e)} \end{aligned}$$

$$R' = \omega L / Q'$$

$$= \frac{k^2(R_2 + r_e)}{(1+S)^2} \frac{L_1}{L_2}$$

$$\therefore Q = \frac{\omega L}{R_1 + R'}$$

$$= \frac{(1+S)(1+S-k^2)}{(1+S)^2 + k^4(K_{RT} + \frac{S}{k^2} \frac{Q_1}{Q_e})} Q_1 \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

(2.8) 式の  $Q$  は  $\frac{Q_1}{Q_2} \gg 1$  であれば

$$S \doteq \sqrt{1-k^2}$$

$$\text{に於て } Q_{min} \doteq Q_2 \left( \frac{2+2\sqrt{1-k^2}}{k^2} - 1 \right) \quad (2.9)$$

なる極小値を有する

## 2.2 空心電流変成器の能率

(2-5) 式よりすれば  $S = L_e/L_2$  なる  $S$  の変化に対して、即ち異った加熱コイルを接続したり或は加熱進行に於ける負荷インピーダンスの変化に因して、 $S$  の大なる程電流変成器の一次側より見た等価インダクタンス分の変化率は小になる。一方等価的な  $Q$  値は (2.8) 式によって  $S = \sqrt{1-k^2}$  附近で極小値を有し、この極小値附近で  $S$  の変化に対する  $Q$  値の変化率が最も少い事が分る。これらの事は何れも加熱コイルに対する電流変成器の設計上有力な指針となるものであるが、これらを最終的に裏付けるものとして電流変成器の能率を算定する。

電流変成器の等価回路に於て Fig 2-4 に示す如く、全入力電流を  $i_0$ 、励磁電流及び負荷電流を夫々  $i_1$ 、 $i_2$  とすると

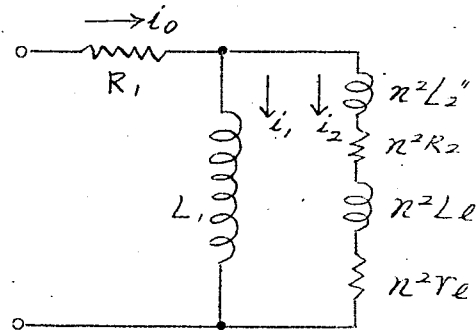


Fig. 2-4

$$\frac{\omega(L_2'' + L_e)}{R_2 + r_L} \gg 1 \quad \text{の時は}$$

$$i_0 \doteq i_1 + i_2$$

$$i_1 \doteq \frac{n^2(L_2'' + L_e)}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} i_0, \quad i_2 \doteq \frac{L_1}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} i_0$$



一次コイル、二次コイル及び負荷に発生する損失を夫々  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_e$  とすれば、前記の近似が成立するものとして、

$$W_1 = i_1^2 R_1$$

$$W_2 = i_2^2 n^2 R_2 = \left\{ \frac{L_1}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} \right\}^2 \frac{W_1}{R_1} n^2 R_2$$

$$W_e = i_2^2 n^2 r_e = \left\{ \frac{L_1}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} \right\}^2 \frac{W_1}{R_1} n^2 r_e$$

従って電流変成器の効率  $\gamma$  は

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{W_e}{W_1 + W_2 + W_e} \\ &= \frac{\left\{ \frac{n L_1}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} \right\}^2 \frac{r_e}{R_1}}{1 + \left\{ \frac{n L_1}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} \right\}^2 \frac{R_2}{R_1} + \left\{ \frac{n L_1}{L_1 + n^2(L_2'' + L_e)} \right\}^2 \frac{r_e}{R_1}} \end{aligned}$$

(2.6)式、(2.7)式によってこれを計算すると

$$\gamma = \frac{k^2 S}{(1+S)^2 + k^4 K_{RT} + \frac{Q_1}{Q_e} k^2 S} \cdot \frac{Q_1}{Q_e} \quad \dots\dots (2.10)$$

$S$  に関する  $\gamma$  の極値を求めると

$$S = \sqrt{1 + k^2 K_{RT}} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

に於て極大値を有する。

Fig. 2-5 に  $S$  の変化に対する  $\gamma$  の変化する様様の計算例を示す。同図に並示される  $Q$  について、 $Q_1/Q_e \gg 1$  の時には (2.8) 式は次を示す如く簡易化される

$$Q \doteq \frac{(1+S)(1+S-k^2)}{k^2 S} Q_e$$

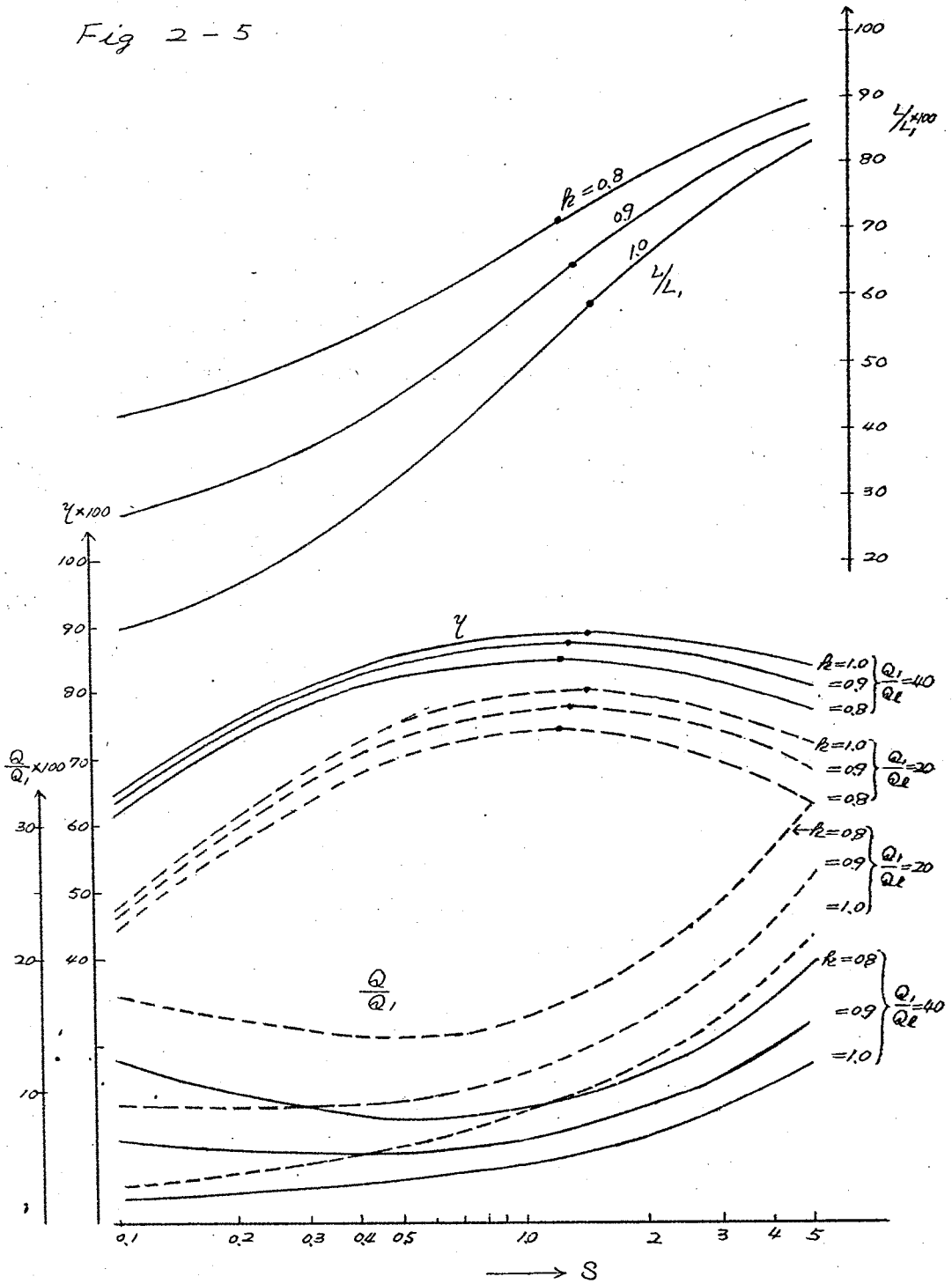
従って

$$S \gg 1 \text{ の時} \quad Q \div \frac{S}{k^2} Q_L \longrightarrow Q_L$$

$$S \ll 1 \text{ の時} \quad Q \div \frac{1-k^2}{1+k^4/K_{RT}} Q_L \longrightarrow (1-k^2) Q_L$$

即ち  $S$  が大きくなると  $Q$  は一次コイルの  $Q_L$  値に近づき、負荷電流が流れ難くなるので損失は一次コイルのみに発生する傾向となる。又  $S$  が極端に小さくなると  $Q$  は二次コイルを短絡した時のそれに近づき ( $Q_L$  より小さい)、電流変成器の入力は負荷に於けるよりも一次及び二次コイルの損失に分配される傾向が大となる。これらの事より電流変成器を能率を最大ならしめる  $S$  は  $Q_{min}$  を与えるそれよりも大きい方に偏している事が分る。

Fig 2-5



### 2.3 磁心入電流変成器

高周波焼入の電源として電動高周波発電機を用いる場合には、負荷の低力率は設備的に又運転上に不利であり、又周波数が低いと励磁電流が大となるので空心電流変成器では大型化せられる。更に真空管式自励発振器でも特に電流変成器の小型化が要求される場合には、硅素鋼板或はフェライトコア等を磁心とせる電流変成器を用ひて励磁電流による力率の低下を防止し、同時に能率の向上、及び小型化が実現される。

磁心入電流変成器は商用周波用変成器と全く同一に取扱はれ、負荷電流に対して励磁電流を無視すると等価回路は前節と同一の記号を用ひて Fig. 2-6

に示す如くなる。

二次コイルの漏洩インダクタンスが負荷インピーダンスに比して非常に小さい場合は、

一次=次の巻線比を適

当に選ぶ事によつて負荷に必要な電力を供給し、又は電源との整合を得る事が出来るが、電流変成器が使用される場合は加熱コイルとしての負荷インピーダンスが相当に小さいのが普通であつて、電流変成器の構造によつてはその漏洩インピーダンス以下ともなる。かかる場合には

i. 漏洩インピーダンスによる電圧降下の爲に、必要な加熱コイルの端子電圧を得るのに電流変成器の入力電圧を不必要に上げるか或は一次=次の巻線比を小にせねばならない。この事は磁心の断面積の拡大、又は一次=次の巻回数の増加を必要とする結果となり、電流変成器のKVA容量は増大し、小型化と逆行すると同時に損失の増加ともなる。

ii. 極端な場合、 $n$ を減じてても結果に於て漏洩インピーダンスを増加するやうな場合、例えば一次巻回数をそのまゝとし、

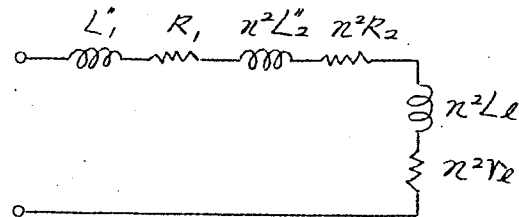


Fig. 2-6

二次巻面数を増したとしても入力電圧の大部分は漏洩インピーダンスの電圧降下に消費される結果となり、加熱コイルに必要な電力を供給し得ない場合も生じ得る。

iii. 電流変成器の一次端子よりみた負荷力率は低下するので、補償用コンデンサの容量が増大し、これらの配線に於ける電圧降下と損失を招くと同時に設備費の上昇ともなる。

以上のやうに磁心入電流変成器はその漏洩インピーダンスの影響する処が大であつて、その能率も前記から分るやうに加熱コイルの負荷力率の高い程、又漏洩インピーダンスの小さい程高くなる。

尚、磁路の全部を磁性体とせず適当に空隙或は空間を設ける事により、僅かではあるが空芯電流変成器の場合と同様加熱進行に伴う負荷インピーダンスの変化を補償する事が出来る。

## 2.4 リード線

加熱コイルは多くの場合帯状導体でなるリード線によつて電流変成器に接続される。このリード線インダクタンスは電流変成器の二

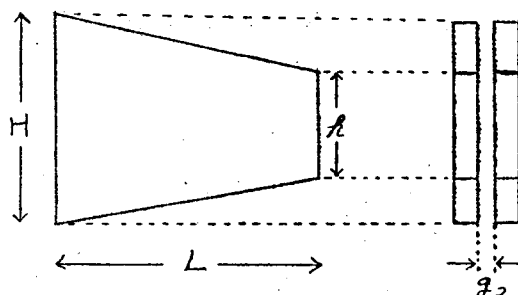


Fig 2-7

次コイルに於ける漏洩インダクタンスと同様、加熱コイルの空隙の増大と同一意義となるので、これまでの解析に於ける負荷インピーダンスとしては加熱コイルにリード線のインピーダンスが附加されねばならない。

リード線を Fig. 2-7 に示す如く台形とし、電流変成器との接合部の巾を図示の  $H$ 、加熱コイルとのそれを  $A$ 、又長さ及び往復リード線間の絶縁層の厚みを夫々  $L$ 、 $g_2$  とする。 $H$  或  $A$  に対して  $g_2$  が充分小なる時リード線のインピーダンス  $Z_L$  は

$$Z_L = \frac{8\pi^2 f L \cdot 10^{-9}}{H - A} \log \frac{H}{A} \{ 2S_c + j(g_2 + 2S_c) \} \quad (2.12)$$

$H = A$  の時

$$Z_L = \frac{8\pi^2 f L \cdot 10^{-9}}{H} \left\{ 2S_c + j(g_2 + 2S_c) \right\} \quad (2.12)'$$

## 2.5 高周波発電機を電源とせる場合

M-G式高周波焼入装置に於ては高周波発電機の出力電圧は普通、自動電圧調整され、一定電圧に保持されて電流変成器の一次に印加される。

電流変成器は磁心入とし、その励磁電流が負荷電流に比して無視出来るものとし、二次巻線は一次巻線を全く蔽ひ $g_1$ なる空隙を以てその外側にあるとし、漏洩インピーダンスは二次巻線にのみ存在するとすれば

$$\omega L_2'' \doteq \frac{8\pi^3 f N_0^2 R}{H_0} \cdot 10^{-9} \cdot 2(g_1 + 2S_c) \quad (2.13)$$

但し  $R$  : 二次巻線の内半径

$H_0$  : " の実効高

$N_0$  : " の巻回数

従つて電流変成器の一次側に於ける配線のインピーダンスが無視出来る場合、高周波発電機出力端子より電流変成器を見た負荷インピーダンス  $Z_T$  は加熱コイルの負荷インピーダンスが (1.13) (1.26) 式で表される時には

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{8\pi^3 f N^2 \gamma_0 S_0 \cdot 10^{-9}}{l} n^2 Z_T \\ &= \frac{2\pi \gamma_0 N^2}{l} \frac{\rho_0}{S_0} n^2 Z_T \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{Z_1(x_0)}{Z_0(x_0)} + j \left\{ \frac{2g}{S_0} + \frac{Z_2(x_0)}{Z_0(x_0)} \right\} \\ G &= \left( \frac{N_0}{N} \right)^2 \frac{R}{\gamma_0} \frac{l}{H_0} (g_1 + 2S_c) + \frac{1}{N^2} \frac{L}{2\pi \gamma_0} \frac{l}{H} (g_2 + 2S_c) + g \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.15)式のGに於けるオ1項は電流変成器の、オ2項はリード線の影響を、夫々加熱コイルの空隙 $\mathcal{L}$ に對比して等価的に換算せるものを示し、オ1章の計算例に於ける空隙 $\mathcal{L}$ の代りにGを適用すれば高周波発電機の負荷状況はこれにより察知出来る事になる。

以上に於ては電流変成器の一次側配線に於けるインピーダンスを無視したが、これが相当長くなる時は勿論充分に考慮に入れられねばなら

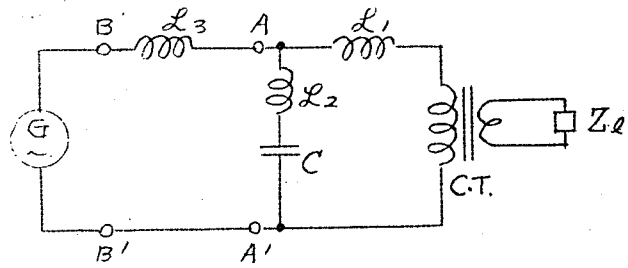


Fig. 2-8

ない。従つて高周波

発電機の負荷回路はFig. 2-8に示す如く、 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ なる、夫々電流変成器の一次配線、進相コンデンサ配線及び発電機母線のインダクタンスが加味される。 $\mathcal{L}$ は電流変成器の漏洩インピーダンスと同一意味を持ち、 $\mathcal{L}_2$ は進相コンデンサCを打消す。 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ は共に進相コンデンサCの容量増加を要求するので、Cは出来るだけ電流変成器に近く設置される事が望ましい。

尚、この他に實際上の重要事項として計測誤の問題がある。即ち発電機の出力電圧、電流負荷の電力、無効電力等の計測誤をFig. 2-8に示す母線終端AA'に設定せる場合には、電流変成器の入力電圧はCの如何に拘らず $\mathcal{L}_1$ に支配されるだけであるが、計測誤がBB'に設置されれば場合にはCの値によつて相当に左右され、Cが大きくなると電流変成器の入力電圧は計測誤の出力電圧よりも高くなり得る。この事を概略的に解析すると次の如くなる。

簡単の爲に $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ を無

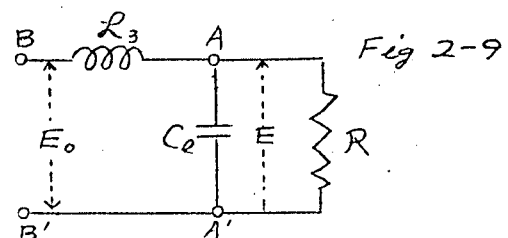


Fig. 2-9

視し、又  $A A'$  よりみた負荷インピーダンスは等価抵抗  $R$  と余剰リアクタンスに相当する  $C_e$  よりなるとすれば Fig. 2-8 は Fig. 2-9 に示す如くなる。計測点  $B B'$  に於ける端子電圧を  $E_0$ 、電流変成器の入力電圧を  $E$  とすれば

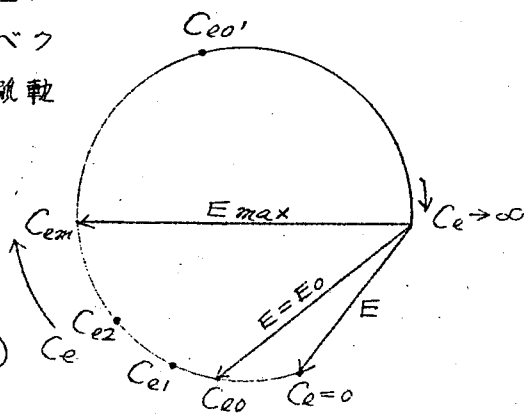
$$Z_B = \frac{R}{1 + \omega^2 C_e^2 R^2} + j \left( \omega L_3 - \frac{\omega C_e R^2}{1 + \omega^2 C_e^2 R^2} \right)$$

$$E = \frac{E_0}{1 - \omega^2 L_3 C_e + j \frac{\omega L_3}{R}} \quad \text{----- (2.16)}$$

(2.16) 式に於て、 $R$  を一定として  $C_e$  の変化に伴う  $E$  の変化する様相を示せば

Fig. 2-10 の如く、 $E$  のベクトルは  $E_{max}$  直至とする円弧軌跡となる。

図に於て



$$E_{max} = \frac{R}{\omega L_3} E_0, \quad (\omega C_{em} = \frac{1}{\omega L_3})$$

$C_{e1}, C_{e2}$  は計測点  $B B'$  より見た負荷力率が 1 なる  $C_e$  の値であつて

$$\omega C_{e1, e2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\omega L_3}{R} \right)^2}}{2 \omega L_3}$$

$C_{e0}, C_{e0'}$  は  $E = E_0$  を与える  $C_e$  で

$$\omega C_{e0, e0'} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \left( \frac{\omega L_3}{R} \right)^2}}{\omega L_3}$$

勿論  $R \geq 2 \omega L_3$  でなければ力率は常に遅れとなり、

$R \geq \omega L_3$  でなければ  $E$  は常に  $E_0$  より大きな値とはなり



得ない。

以上を綜合するに、 $R \geq 2\omega L_3$  であつて  $C_{e1}, C_{e2}$  が存在する場合、一般に  $C_{e1} > C_{e0}$  が恒等的に成立するから、計測点  $B, B'$  に於ける力率が 1 の時には、 $E > E_0$  である。又  $R < 2\omega L_3$  で  $C_{e1}, C_{e2}$  が存在しない時でも  $R \geq \omega L_3$  であれば、

$E > E_0$  なる機会がある事が分る。斯様に計測点によつて實際に電流変成器の入力電圧  $E$  が変化する事は、鋼の誘導加熱に於けるインピーダンス変化を考慮すると、加熱に於ける電力変動を大ならしめるので、計測点は出来るだけ母線の終端に並べ事が望ましい。



### 第3章 真空管発振器

高周波焼入に使用される周波数は実用的に  $1\text{KC} \sim 1\text{MC}$  の可成り広範囲に亘つて居り、従つてこれに用ゐられる高周波電源も用途及び周波数によつて異なるが、大略次の如く分類出来るであらう。

高周波発電機  $1\text{KC} \sim 10\text{KC}$

火花式発振器  $20\text{KC} \sim 100\text{KC}$

真空管発振器  $10\text{KC} \sim 1\text{MC}$

この裡真空管を利用せる高周波電源設備としてはその高周波電力の発生方式から、自励発振によるものと他励式電力増巾方式を採るものがある。前者は凡そ  $30\text{KC}$  以上の周波数に対して応用され、その電力は主に陽極直流電圧の調整によつて行はれ、后者は大体  $10 \sim 20\text{KC}$  帯の周波数帯に利用されその電力調整は励振器によつて行はれる。

低周波に於て自励よりも他励式が採用されるのは次の如き理由による。

i 加熱コイルと被加熱体間の空隙は機械的な要請によつて定まり、一般的には周波数と無関係であるから、周波数が下ると効率率は向上する。従つて加熱コイルのインダクタンス分を発振用タンク回路のインダクタンス素子に利用する自励発振器に於てはタンク回路のQ値の爲に大きなインダクタンスを附加せねばならない。同時に低周波なるが爲にタンクコンデンサは大型となり、発振回路の幾何学的寸法が大となるのみならずその爲の損失も増大し電力効率も下る。

ii 一方B級プッシュプル回路を使用せる他励式電力増巾方式に於ては、負荷のQ値よりも励振周波数に対する周調度が重要である。従つて加熱進行に於けるインピーダンス変化に対して周調が自動的に防止される自励発振器の場合とは逆に、加熱コイル自体のQ値の大なる高い周波数域に於ては他励式の採用は

その面で問題を提起するが、低い周波数域の加熱コイルについては負荷回路の $Q$ 値を相当程度低く出来、共振の尖鋭さが鈍くなるので他励式の採用が容易となる。

iii その他、低周波の自励発振は寄生振動を生じ易く、又陽極直流電圧をサイクロン制御によつて調整するやうな場合には直流電源に充分な平滑回路を要するが、他励式で電力調整を励振器で行う場合にはその必要がない。

他励式真空管発振器を高周波焼入の電源とする場合は、その負荷回路の取扱は前章の高周波発電機を電源とせる場合と同様であり、且負荷の力率調整は進相コンデンサのみによらず励振周波数による追跡が比較的容易に出来る等の便もあるが、高周波発電機に対しては真空管の寿命の点、自励式真空管発振器に比しては出力管ノ本当りの出力が少い等の欠点を持っている。

自励発振器に於ては、負荷インピーダンスの変化によつて発振電圧が変り、従つて電流変成器の入力電圧も変化する事になるので、本章に於てはこれらの事を中心に検討する。

### 3.1 自励発振回路

高周波焼入に利用される真空管発振器は自励発振が多い。自励発振器に於ては発振用タンク回路の $Q$ 値として  $Q > 2\pi$  を必要とするが、電流変成器の設計により、そのインダクタンス分及び $Q$ 値を適当に選定して、Fig. 3-1 に示す如くハートレー、コルピッツ、陽極同調等のLC発振回路のタンク回路に組込む事が出来る。又直流饋電方式として、直列及び並列の二方式が保安或は寄生振動等を考慮して適当に選ばれる事、一般遮断器と全く同様である。

陽極負荷回路は、コルピッツ回路の場合にはオコ草の電流変成器の解析がそのまま応用出来るので、こゝでは特にグリッドに対する電力饋還を電流変成器とは別に設けたインダクタンス

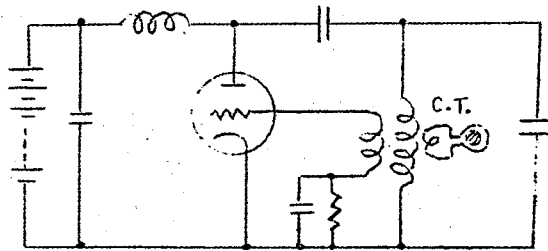
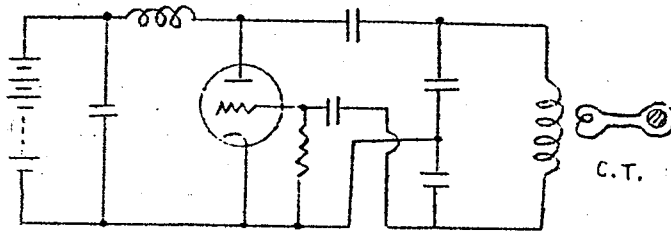
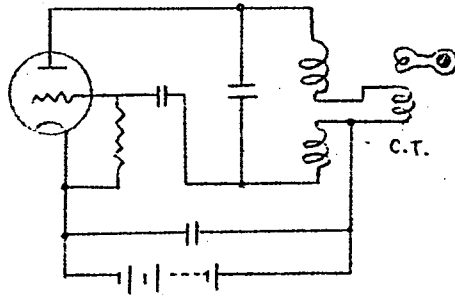
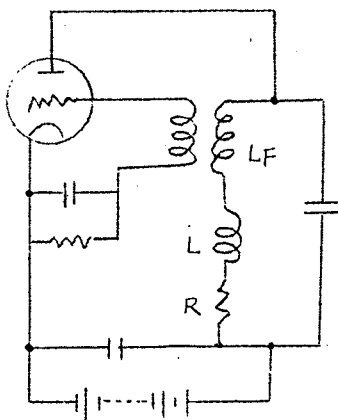
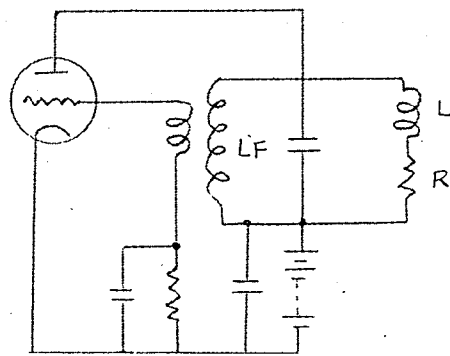


Fig 3 - 1



(a)



(b)

Fig. 3-2

コイルの磁気結合による場合の代表例として Fig. 3-2 (a) 及 (b) に示す回路について検討する。図に於て  $L$ ,  $R$  は電流変成器の一次側よりみた負荷の等価インピーダンス、 $L_F$  はグリッド饋還用インダクタンスコイルのインダクタンスを示す。(a) 図に示す回路ではグリッド饋還用コイルが負荷に直列になっているので、グリッド饋還電圧は負荷の影響を大きさ及位相について受けるが、こゝにタンク回路のインピーダンス及  $Q$  値等を (a) 図及 (b) 図について比較するに、グリッド饋還用インダクタンスコイルの抵抗及び同コイルに課せらるべきグリッド励振電力に対する等価抵抗分を無視すると

(a) 図に示す回路に於ては

$$\text{タンク回路の } Q: Q_{pa} = \left(1 + \frac{L_F}{L}\right) Q$$

$$\text{負荷インピーダンス: } Z_{pa} = Q \omega L \left(1 + \frac{L_F}{L}\right)^2$$

$$\text{インダクタンス分: } L_{pa} = L_F + L$$

(3.1)

(b)図に示す回路に於ては

$$\text{タンク回路の } Q : Q_{pb} = \left(1 + \frac{L}{L_F}\right) Q$$

$$\text{負荷インピーダンス : } Z_{pb} = Q \omega L$$

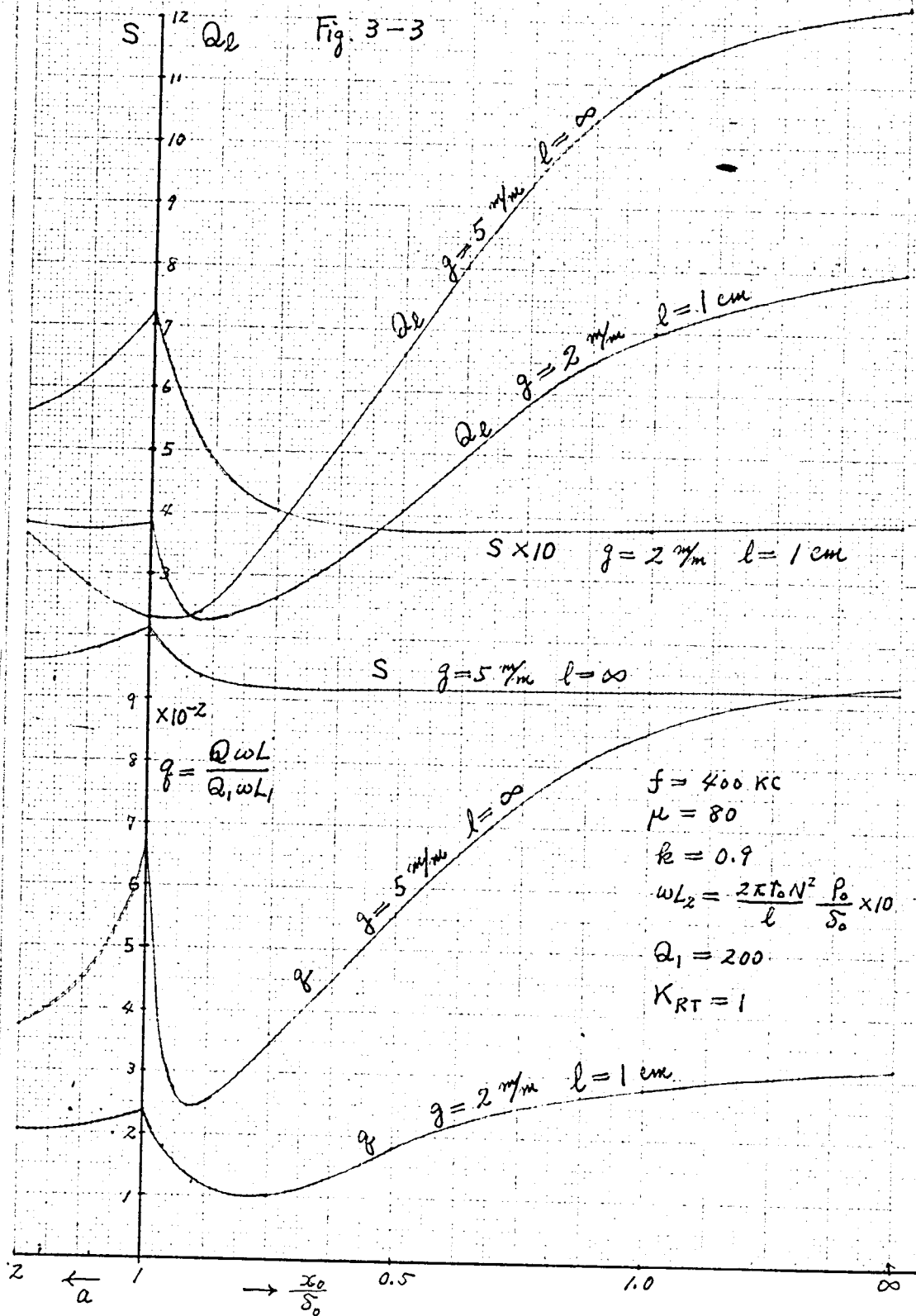
$$\text{インダクタンス分 : } L_{pb} = \frac{L_F L}{L_F + L}$$

(3.2)

但し(3.1)(3.2)式に於て  $Q = \omega L / R$ 。

$Q \omega L$  は加熱の進行に対して一時低下するが、后漸次増大するので  $Z_{pa}$  は  $Z_{pb}$  に比して加熱に伴う変化が大きく、発振器の動作上は好しくない。一方(b)図の回路は、真空管に対する適性負荷インピーダンスを得るのに電流変成器の一次二次巻線比を増す必要があり、実際製作面の困難が伴ひ共に天々一長一短がある。尚これらについて基本となる  $Q \omega L$  について一例を示せば Fig 3-3 に示す如くである。

Fig. 3-3





## 3.2 発振電圧

自励発振器を高周波焼入に使用する場合、その発生高周波電圧或は電力は普通陽極直流電圧の制御で行はれるが、一つの加熱周期に対しては通常陽極直流電圧は一定に保たれる。勿論陽極直流電圧を一定とせる場合、真空管の経年変化或は個別差による特性の変化に基く発振電圧の変化もあり得るので、これを一定とせず、発振電圧を一定ならしむるやう陽極直流電圧を自動制御する方法も採られるが、こゝでは主に陽極直流電圧一定として負荷インピーダンスの変化に対する発振電圧の状況を検討し、負荷の加熱進行に伴う電力の変遷の察知に資せんとするものである。

真空管の増巾率を $\mu$ 、発振時陽極電流 $i_p$ の最高値 $i_{pm}$ に於ける相互コンダクタンスを $g_m$ とし、陽極直流電圧、グリッドバイアスを夫々 $F_p, E_g$ とする。陽極負荷、即ち発振タンク回路は発振する基本周波数に対して充分高Qで陽極交流電圧或は発振電圧 $E_p$ 及びグリッド交流電圧 $E_g$ の高調波を無視すれば、これらの波形関係は一様に知られているやうに Fig. 3-2 に示す如くなる。図に於て $\theta_p, \theta_g$ は夫々陽極及びグリッド電流の流通角である。

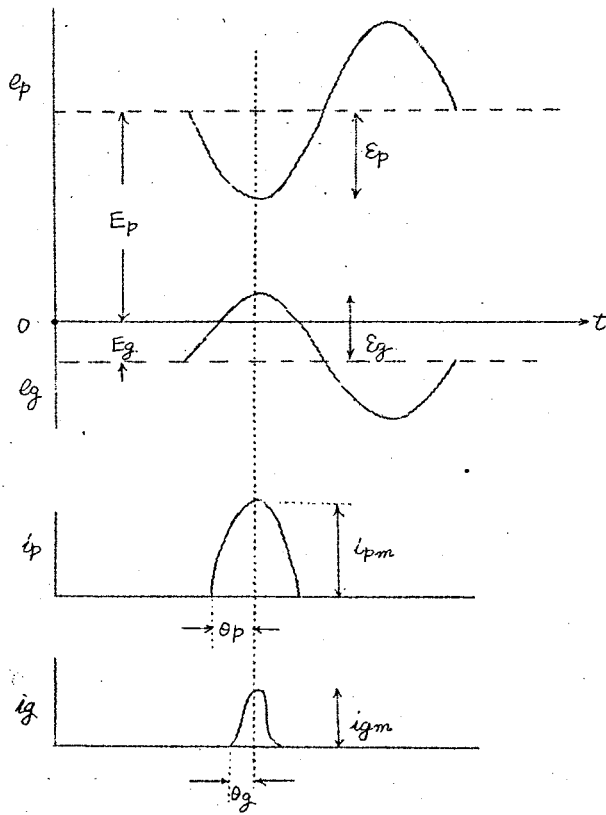


Fig. 3-4

自励発振では負荷インピーダンスは略純抵抗と見做され

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_p &= \frac{Z_p}{Z_p + \beta \frac{\mu}{\frac{2}{3} g_m}} \mu \varepsilon_g \\ \beta &= \frac{\pi}{\theta_p - \sin \theta_p \cos \theta_p} \end{aligned} \right\} \text{----- (3.3)}$$

$$\varepsilon_g - \frac{\varepsilon_p}{\mu} = (\varepsilon_g - \frac{\varepsilon_p}{\mu}) / \cos \theta_p \text{----- (3.4)}$$

$$\varepsilon_p = \mu \varepsilon_g + (\varepsilon_p - \mu \varepsilon_g) / \cos \theta_p \text{----- (3.4)'}$$

自励発振に於ける反結合係数を  $1/M$  とすれば

$$M = \frac{E_p}{E_g} \text{ ----- (2.5)}$$

(2.5) 式を (2.3), (2.4) 式に代入して整理すると

$$\beta = \frac{2}{3} g_m \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{\mu} \right) Z_p \text{ ----- (2.6)}$$

$$E_p = \frac{E_g - \frac{E_p}{\mu}}{\frac{1}{M} - \frac{1}{\mu}} \frac{1}{\cos \theta_p} \text{ ----- (2.7)}$$

$g_m$  は  $i_{pm}$  の3乗根に比例するが、一応これを一定と見做すと  $Z_p$  の変化に伴う  $M$  の変化が既知であれば (2.6) 式より  $Z_p$  に対して  $\beta$  を求める事が出来る。而して  $\beta$  と  $\theta_p$  の関係は (2.3) 式の如くであるから、一般的には  $\beta$  と  $\theta_p$  の図表等により  $\beta$  から  $\theta_p$  を求める事が出来るので、 $Z_p$  及び  $M$  を知れば以上のやうに (2.6) (2.3) 式によつて  $\theta_p$  を算出する事が出来る。

一方 (2.7) 式に於ける  $E_g$  は自励発振器では一般に自己バイアス方式が採られるので、グリッド直流電流を  $I_g$ 、バイアス抵抗を  $R_g$  とすれば真空管に關する次の諸式からこれを決定する事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} E_g &= I_g R_g, & I_g &= \frac{\theta_g}{2\pi} i_{gm} \\ \cos \theta_g &= \frac{E_g}{E_g} \\ i_{gm} &= \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} i_{pm} \\ i_{pm} &= \frac{2}{3} g_m \left( E_g - \frac{E_p}{\mu} \right) (1 - \cos \theta_p) \\ \alpha &= \frac{E_p - E_p}{E_g - E_g} \end{aligned} \right\} \text{ (2.8)}$$

$\sigma$  : 真空管によつて定まる常数

自励発電機が Fig. 3-5 に示すやうな定電流特性曲線に於て、負荷直線 AB を以て動作しているとすると

$$AC = E_g \quad AE = E_g$$

Fig. 3 - 5  
(80)

$$\frac{AD}{AB} = \cos \theta_p$$

故に直線と定電流曲線  $i_p = 0$  の交点を F とすると  $E_p$  が与えられた時には C 及 F は定点となり、 $M = E_p / E_g$  が一定なる時は  $\angle BAC$  は一定である。更に  $\theta_p$  が与えられると AD、AB の比が決定される事になるので  $\angle BFC$  が定まり、最大出力点 B は直線 FB' 或はその延長上にある事になる。茲で以上のやうな諸条件を満す動作曲線 AB を仮定すると、これよりグリッド直流電流  $I_g$  を算出する事が出来る。従つて、かくして仮定動作直線或は B 点より算出される  $I_g R_g$  と仮定動作基点 A の  $E_g$  と比較し、両者が一致するまで動作直線仮定による計算比較を行ひ、究局的に動作直線が決定される。尚正確には、 $Z_p$  より  $\theta_p$  を求める (3.6) 式に於て  $g_m$  を仮定一定としたが、究局的には B 点に於ける  $i_{pm}$  により割り出される  $g_m$  が仮定せる  $g_m$  と一致しなければならぬ事は勿論である。

Fig. 3-6 は Fig. 3-2 (a) に示す回路を用ひる場合の計算例であつて

$$Z_{pa} = \frac{Q_1 L_1}{\sqrt{L_F C}} \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{1+S-k^2}{1+S} \frac{L_1}{L_F}}} \left( 1 + \frac{1+S}{1+S-k^2} \frac{L_F}{L_1} \right)^2$$

$$\frac{1}{M} = \frac{M_F}{L_F} \frac{1}{1 + \frac{1+S-k^2}{1+S} \frac{L_1}{L_F}}$$

$$E_{CT} = \frac{E_p}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \frac{1+S}{1+S-k^2} \frac{L_F}{L_1}}$$

$$g = \frac{Q \omega L}{Q_1 \omega L_1} = \frac{(1+S-k^2)^2}{(1+S)^2 + k^4 (K_{RT} + \frac{S}{k^2} \frac{Q_1}{Q_2})}$$

但し  $L_1, Q_1$  は電流変成器一次コイルのインダクタンス  $Q_2, Q_2$  は

C はタンクコンデンサ容量

$M_F$  は  $L_F$  に於ける相互インダクタンス

$E_{CT}$  は電流変成器の一次電圧

Fig. 3-6

$f = 400 \text{ KC}$

$\mu = 80$

$g = 5 \text{ mm}$

$\ell = \infty$

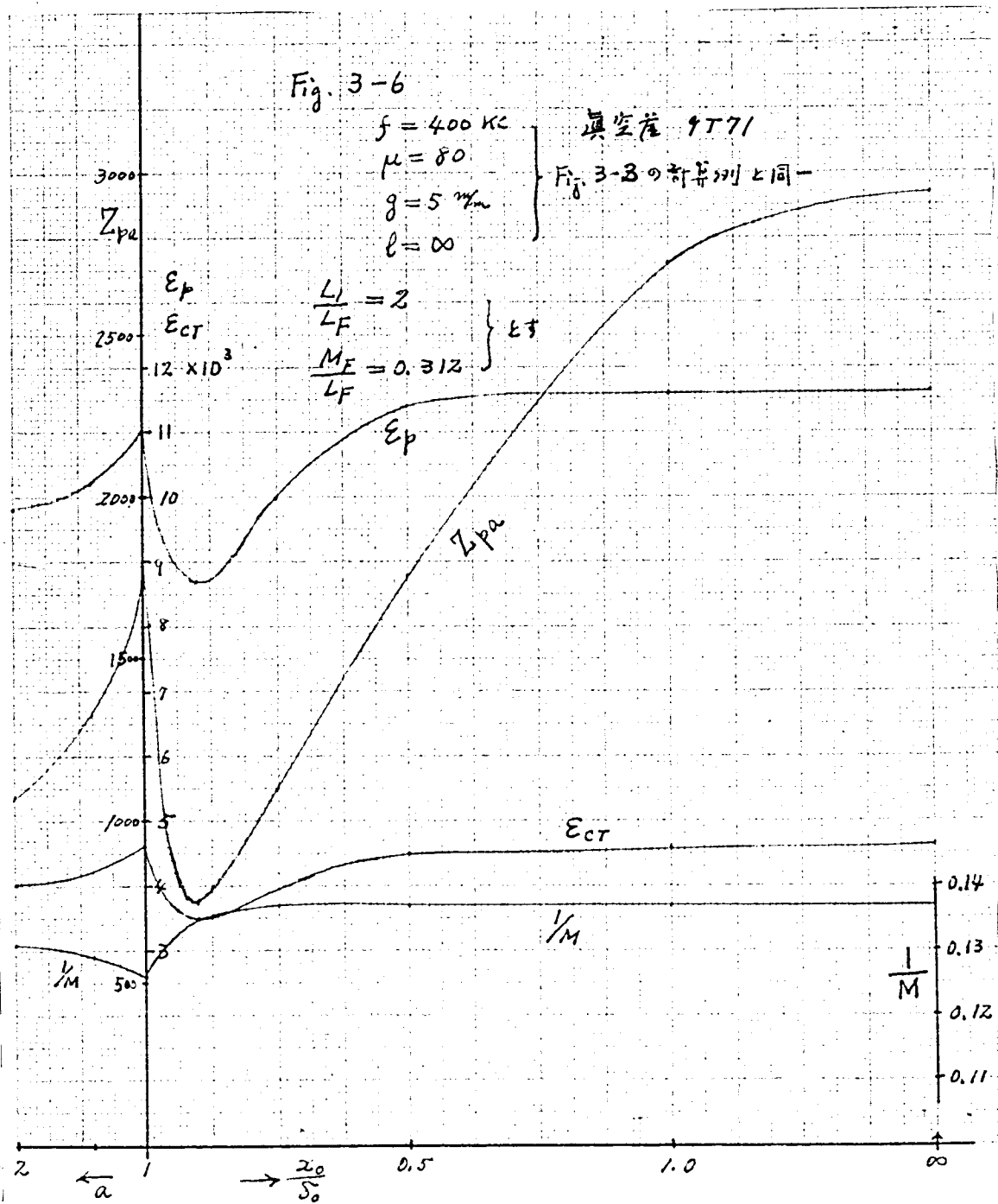
真空管 9T71

Fig. 3-3 の計算例 と同一

$\frac{L_1}{L_F} = 2$

$\frac{M_F}{L_F} = 0.312$

とす



### 3.3 結 び

高周波発電機を高周波焼入の電源とする場合、発電機の進歩特に界磁方式の改良によりその出力電圧は負荷インピーダンスの変化に対して内部インピーダンスの影響を補って一定に保たれ得るやうになつて居り、又周波数が低いので計測器も相当程度完備され、負荷状況を読み取る事が出来る。

一方真空管自励発振器はその構成が非常に簡単な爲に、大型真空管の進歩と共に広く高周波焼入に用ひられるやうになつたが、負荷インピーダンスの変化と共にその動作基点或は負荷直線が移動するので、却つて一般のシ級増幅器より解明の困難がある。加うるに高周波計測器の不備により多くの場合、計器は $E_p$ 、 $I_p$ 、 $I_g$  程度の直流部分に限られ、高周波回路に於ける負荷状況の把握が困難である。

本章に於ては負荷の加熱進行に伴う負荷インピーダンスの変化に対応する真空管の負荷直線の求め方を追究した。これによつて発振電圧或は出力等の移り変りを知る事が出来る。

又発振回路の選定は、使用真空管、負荷の性格、作業性等により決めらるべきもので、オノ章、オニ章はこれらの判定に基準を与えるものである。

84 項欠



## 第4章 誘導加熱に於ける熱伝導

誘導加熱に於てはその発熱源は被加熱体自体の外層部に渦流損として発生し、加うるに被加熱体の加熱進行に伴って発熱領域及び単位体積毎秒当りの発熱量も変化する事、第1章～第3章に示した如くである。

高周波焼入に於ける熱伝導としては既に、その発熱層が非常に薄いとして発熱源は被加熱体の外表面に集中していると仮定し、或は外層部の定められた層内に層状内部発熱とし、或は平板について発熱密度が指数函数的に分布せる場合等について解析されているが、その与える温度分布は周波数の選定に関する事項及び高周波電源の影響が充分満されないので、高周波焼入に於ける温度分布としては場合によって非常に不十分である。

第1章の仮定が遵守されたとすると、加熱コイルの端子電圧が一定であれば毎秒当りの発熱量密度は被加熱体外表面の温度が磁気変態点に達するまでは漸次増大し、而る後は漸減する。又その減少の程度は周波数が高い程、コイルと被加熱体の空隙が大なる程大となる。電流変成器が使用され、その一次端子電圧が一定に保たれる時には加熱コイルと被加熱体の空隙に対して電流変成器及びリード線の漏洩インダクタンス相当の空隙が加味せられる。尚又これらの空隙を0と仮定せる理想的条件の下では発熱量密度は減少しないで一定となる。

更に被加熱体内に於ける発熱量分布も第1章に示せる如く、加熱の進行に伴って大きく変化するが外表面が磁気変態点に達した右、磁気変態層が電流の等価浸透深度  $\delta_0$  に達するまでの間は特異であり、高周波焼入の焼入硬化層に影響する所大なるものがある。

こゝではこれらの事項を考慮して問題を簡易化する為に、

発熱源は第1章で定義せる電力の等価浸透深度  $\Delta$  だけに存在し、

その毎秒発熱量密度は最外表面の  $\omega_0$  を以て均一に分布する、  
という仮定を設け、この仮定の下に  $\Delta$  及び  $\omega_0$  を段階的に設定して

温度分布を検討する。

#### 4.1 円柱材の加熱

Fig. 4-1 に示す如き外半径  $R_0$ 、内半径  $R_2$  なる中空無限長円筒状被加熱体に於て、半径  $R_1$  より  $R_0$  なる層に単位体積当り毎秒  $\omega_0$  ( $\text{cal}/\text{cm}^3 \cdot \text{s}$ ) なる発熱源が存在するとする。被加熱材の密度  $\sigma$  ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )、比熱  $C$  ( $\text{cal}/\text{c} \cdot \text{g}$ )、熱伝導率  $\lambda$  ( $\text{cal}/\text{cm} \cdot \text{c} \cdot \text{s}$ )、温度伝導率  $K$  ( $\text{cm}^2/\text{s}$ ) .....  $K = \lambda/\sigma C$  ..... により半径  $r$  ( $\text{cm}$ ) なる点

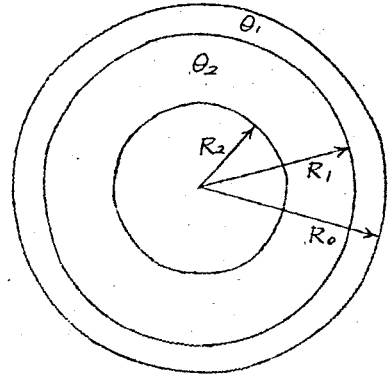


Fig. 4-1

に於ける温度  $\theta$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) を与える基礎微分方程式を作成すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{K} \times \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\omega_0}{\lambda} & R_1 \leq r \leq R_0 \\ &= 0 & R_2 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad \text{----- (4.1)}$$

(4.1) 式を演算子化し、発熱層及び非発熱部に於ける温度及び初期温度を夫々  $(H)_1, (H)_2$ ;  $\theta_{10}, \theta_{20}$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(H)_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(H)_1}{dr} - \frac{P}{K} (H)_1 &= -\frac{\omega_0}{\lambda} - \frac{P}{K} \theta_{10} \\ \frac{d^2(H)_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(H)_2}{dr} - \frac{P}{K} (H)_2 &= -\frac{P}{K} \theta_{20} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4.2)}$$

(4.2) 式を解くと、

$$\left. \begin{aligned} (H)_1 &= \{A_1 + C_1(r)\} J_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) + \{B_1 + C_2(r)\} Y_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) \\ (H)_2 &= \{A_2 + C_3(r)\} J_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) + \{B_2 + C_4(r)\} Y_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) \\ C_1(r) - C_1(r_0) &= \frac{\pi}{2} \int_{r_0}^r \left( \frac{\omega_0}{\lambda} + \frac{P}{K} \theta_{10} \right) r Y_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) dr \\ C_2(r) - C_2(r_0) &= -\frac{\pi}{2} \int_{r_0}^r \left( \frac{\omega_0}{\lambda} + \frac{P}{K} \theta_{10} \right) r J_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) dr \\ C_3(r) - C_3(r_0) &= \frac{\pi}{2} \frac{P}{K} \int_{r_0}^r \theta_{20} r Y_0(j\sqrt{\frac{P}{K}}r) dr \\ &\quad (86) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4.3)}$$

$$C_4(r) - C_4(r_0) = -\frac{\pi}{2} \frac{P}{K} \int_{r_0}^r \theta_{20} r' J_0(j\sqrt{\frac{P}{K}} r') dr'$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} r = R_0 \quad \text{に於て} \quad \frac{d(H)_1}{dr} &= 0 \\ r = R_2 \quad \frac{d(H)_2}{dr} &= 0 \\ r = R_1 \quad \frac{d(H)_1}{dr} &= \frac{d(H)_2}{dr} \quad \text{及び} \quad (H)_1 = (H)_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$\omega_0$  を一定として (4.3) 式 (4.4) 式より  $A_1, B_1, A_2, B_2$  を計算して整理すると次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} (H)_1 &= \frac{\frac{\omega_0}{\lambda} \frac{\pi K}{2P} \{A_{11} J_0(r') + B_{11} Y_0(r')\} + \frac{\pi P}{2K} \{A_{12} J_0(r') + B_{12} Y_0(r')\}}{J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0)} \\ (H)_2 &= \frac{\frac{\omega_0}{\lambda} \frac{\pi K}{2P} \{A_{21} J_0(r') + B_{21} Y_0(r')\} + \frac{\pi P}{2K} \{A_{22} J_0(r') + B_{22} Y_0(r')\}}{J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= R'_1 Y_1(R'_0) \{J_1(R'_1) Y_1(R'_2) - Y_1(R'_1) J_1(R'_2)\} - r' Y_1(r') \{J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0)\} \\ B_{11} &= -R'_1 J_1(R'_0) \{J_1(R'_1) Y_1(R'_2) - Y_1(R'_1) J_1(R'_2)\} + r' J_1(r') \{J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0)\} \\ A_{21} &= R'_1 Y_1(R'_2) \{J_1(R'_1) Y_1(R'_0) - Y_1(R'_1) J_1(R'_0)\} \\ B_{21} &= -R'_1 J_1(R'_2) \{J_1(R'_1) Y_1(R'_0) - Y_1(R'_1) J_1(R'_0)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= -J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \left\{ \int_{R_1}^r \theta_{10} r' Y_0(r') dr' + \int_{R_2}^{R_1} \theta_{20} r' Y_0(r') dr' \right\} \\ &\quad - J_1(R'_0) Y_1(R'_2) \int_{r_0}^{R_0} \theta_{10} r' Y_0(r') dr' + Y_1(R'_0) Y_1(R'_2) \left\{ \int_{R_1}^{R_0} \theta_{10} r' J_0(r') dr' \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_2}^{R_1} \theta_{20} r' J_0(r') dr' \right\} \\ B_{12} &= -J_1(R'_0) Y_1(R'_2) \left\{ \int_{R_1}^r \theta_{10} r' J_0(r') dr' + \int_{R_2}^{R_1} \theta_{20} r' J_0(r') dr' \right\} - J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \int_{r_0}^{R_0} \theta_{10} r' J_0(r') dr' \\ &\quad + J_1(R'_0) J_1(R'_2) \left\{ \int_{R_1}^{R_0} \theta_{10} r' Y_0(r') dr' + \int_{R_2}^{R_1} \theta_{20} r' Y_0(r') dr' \right\} \\ A_{22} &= -J_1(R'_0) Y_1(R'_2) \left\{ \int_{R_1}^{R_0} \theta_{10} r' Y_0(r') dr' + \int_{R_2}^{R_1} \theta_{20} r' Y_0(r') dr' \right\} - J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \int_{R_2}^r \theta_{20} r' Y_0(r') dr' \\ &\quad + Y_1(R'_0) Y_1(R'_2) \left\{ \int_{R_1}^{R_0} \theta_{10} r' J_0(r') dr' + \int_{R_2}^{R_1} \theta_{20} r' J_0(r') dr' \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$B_{22} = -J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \left\{ \int_{R'_1}^{R'_0} \theta_{00} r J_0(r') dr + \int_r^{R'_1} \theta_{20} r J_0(r') dr \right\} - J_1(R'_0) Y_1(R'_2) \int_{R'_2}^r \theta_{00} J_0(r') dr \\ + J_1(R'_0) J_1(R'_2) \left\{ \int_{R'_1}^{R'_0} \theta_{00} r Y_0(r') dr + \int_{R'_2}^{R'_1} \theta_{20} r Y_0(r') dr \right\}$$

$$r' = j\sqrt{\frac{P}{K}} r, \quad R'_0 = j\sqrt{\frac{P}{K}} R_0, \quad R'_1 = j\sqrt{\frac{P}{K}} R_1, \quad \dots$$

(4.6) 式には初期温度条件  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{20}$  が含まれて居らず、又 (4.7) 式には発熱源に関する  $\omega_0$  が含まれて居ない。而して (4.5) 式の  $\textcircled{H}_1$  及  $\textcircled{H}_2$  は (4.6) 式の参与する分と (4.7) 式の参与する部分に完全に分離出来るから、 $\textcircled{H}_1$  及  $\textcircled{H}_2$  は (4.6) 式の参与する加熱による温度分布と (4.7) 式に係る初期温度分布  $\theta_{00}$  及  $\theta_{20}$  の平均化とを重ね合せて求め得る事が分る。

従つて、先づ  $\theta_{00} = 0$ ,  $\theta_{20} = 0$  として加熱による温度分布を求めるに、

$$\textcircled{H}_1 = \frac{\pi K}{2P} \frac{\omega_0}{\lambda} \left[ \frac{R'_1 \{ J_1(R'_1) Y_1(R'_2) - Y_1(R'_1) J_1(R'_2) \} \{ Y_1(R'_0) J_0(r') - J_1(R'_0) Y_0(r') \}}{J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0)} + \frac{2}{\pi} \right] \quad (4.8)$$

$$\textcircled{H}_2 = \frac{\pi K}{2P} \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{R'_1 \{ J_1(R'_1) Y_1(R'_0) - Y_1(R'_1) J_1(R'_0) \} \{ Y_1(R'_2) J_0(r') - J_1(R'_2) Y_0(r') \}}{J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0)}$$

(4.8) 式に逆変換を施すと

$$\theta_1 = \frac{\omega_0}{\sigma C} \left[ \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 - R_2^2} t + M_1(r) - \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) Y_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) - Y_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) J_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0})}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}} \right. \\ \left. \times \left\{ Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) \right\} \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} t} \right] \quad (4.9)$$

$$\theta_2 = \frac{\omega_0}{\sigma C} \left[ \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 - R_2^2} t + M_2(r) - \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) Y_1(\alpha_n) - Y_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) J_1(\alpha_n)}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}} \right. \\ \left. \times \left\{ Y_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) - J_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) Y_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) \right\} \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} t} \right]$$

但し、 $\alpha_n$  は (4.10) 式の第  $n$  番目の正根であり、 $M_1(r)$ ,  $M_2(r)$ ;  
 $F_1(\alpha_n)$ ,  $F_2(\alpha_n)$  は夫々 (4.11) 式及び (4.12) 式に示される。

$$J_1(x)Y_1\left(\frac{R_2}{R_0}x\right) - J_1\left(\frac{R_2}{R_0}x\right)Y_1(x) = 0 \quad \text{----- (4.10)}$$

$$M_1(r) = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_0^2 - R_2^2} \left\{ \frac{3R_0^2 - R_1^2}{8K} - \frac{r^2}{4K} + \frac{R_0^2}{2K} \log \frac{r}{R_0} + \frac{R_1^2 R_2^2}{2K(R_1^2 - R_2^2)} \log \frac{R_1}{R_2} \right. \\ \left. - \frac{R_0^2 R_2^2}{2K(R_0^2 - R_2^2)} \log \frac{R_0}{R_2} \right\} \quad \text{----- (4.11)}$$

$$M_2(r) = \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 - 3R_2^2}{8K} + \frac{r^2}{4K} - \frac{R_2^2}{2K} \log \frac{r}{R_2} - \frac{R_0^2 R_1^2}{2K(R_0^2 - R_1^2)} \log \frac{R_0}{R_1} \right. \\ \left. + \frac{R_0^2 R_2^2}{2K(R_0^2 - R_2^2)} \log \frac{R_0}{R_2} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(\alpha_n) &= J_0(\alpha_n)Y_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) - Y_0(\alpha_n)J_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) \\ F_2(\alpha_n) &= J_1(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) - Y_1(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

(4.9) 式は時間  $t$  の経過と共に実質的に消滅する過渡項とも称すべき無限級数の和を含んでいるが、(4.10) 式によって

$J_1(\alpha_n)Y_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) = J_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right)Y_1(\alpha_n)$  なる関係を用いると  $\theta_1$  及  $\theta_2$  の過渡項は等しい事が分る。

更に  $t=0$  の時  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=0$  としているから

$$\frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ J_1\left(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}\right)Y_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) - Y_1\left(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}\right)J_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) \right\} \left\{ Y_1(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) - J_1(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \right\}}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}}$$

$$= \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ J_1\left(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}\right)Y_1(\alpha_n) - Y_1\left(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}\right)J_1(\alpha_n) \right\} \left\{ Y_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) - J_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \right\}}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}}$$

$$= M_1(r) \quad (\text{発熱層に於て}) \quad \text{----- (4.13)}$$

$$= M_2(r) \quad (\text{非発熱部に於て})$$

従って (4.13) 式の関係により (4.9) 式の  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  は次の (4.14) 式で表わされる  $\theta$  に統一されて一つの式で示される事になる。

$$\theta = \frac{\omega_0}{\sigma C} \left\{ \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 - R_2^2} t + \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} t} \right) \frac{\left\{ J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) Y_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) - Y_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) J_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) \right\}}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}} \right. \\ \left. \times \left\{ Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) \right\} \right\} \quad \text{----- (4.14)}$$

(4.14) 式は勿論 (4.8) 式の (H) に施す逆変換の方法によって導く事も出来る。

次に  $\omega_0 = 0$  とし、初期温度分布  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$  が (4.14) 式の結果であるとして統一された  $\theta_0$  で表わされた場合について、その平均化に於ける温度分布を求める。

$$\theta_0 = \frac{\omega_0}{\sigma C} \left\{ \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 - R_2^2} T + \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} T} \right) \frac{\left\{ J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) Y_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) - Y_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}) J_1(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}) \right\}}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}} \right. \\ \left. \times \left\{ Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) \right\} \right\} \\ = S(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\alpha_n, T) \left\{ Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) \right\} \quad \text{----- (4.15)}$$

とすれば (4.7) 式は簡易化され、(4.5) 式の (H)<sub>1</sub>, (H)<sub>2</sub> は次式に示す (H) に統一される。

$$\textcircled{H} \left\{ J_1(R'_0) Y_1(R'_2) - J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \right\} \\ = -\frac{\pi}{2} \frac{P}{K} \left\{ J_1(R'_0) Y_1(R'_2) \int_r^{R_0} \theta_0 r Y_0(r') dr + J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \int_{R_2}^r \theta_0 r Y_0(r') dr \right. \\ \left. - Y_1(R'_0) Y_1(R'_2) \int_{R_2}^{R_0} \theta_0 r J_0(r') dr \right\} J_0(r') \\ - \frac{\pi}{2} \frac{P}{K} \left\{ J_1(R'_0) Y_1(R'_2) \int_r^{R_0} \theta_0 r J_0(r') dr + J_1(R'_2) Y_1(R'_0) \int_r^{R_0} \theta_0 r J_0(r') dr \right. \\ \left. - J_1(R'_0) J_1(R'_2) \int_{R_2}^{R_0} \theta_0 r Y_0(r') dr \right\} Y_0(r') \quad \text{----- (4.16)}$$

(4.16) 式に逆変換を施し整理すると、

$$\theta = S(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\alpha_n, T) \left\{ Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) \right\} \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} t} \quad \text{----- (4.17)}$$

中空無限長円筒状被加熱体を  
内面加熱する場合には、Fig.  
4-2 に示す如くその内径を  
 $R_0$ 、外径を  $R_2$  とし  $R_0$  より  
 $R_1$  なる層に  $\omega_0$  が存在すると  
すれば、(4-1) 式乃至 (4.17)  
式は全くそのまゝ適用出来る。

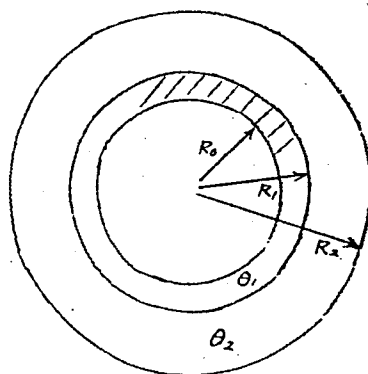


Fig. 4-2

又、被加熱体が無空の無限  
長円柱の場合には (4.4) 式 ~  
(4.17) 式に於て  $R_2 = 0$  とす  
れば良い。従つて初期温度分布を 0 とし、外径  $R_0$  より  $R_1$  なる  
層に  $\omega_0$  の密度を以て発熱源が存在する時の温度分布は、

$$\theta = \frac{\omega_0}{\sigma C} \left[ \left(1 - \frac{R_1^2}{R_0^2}\right) t + \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} t}\right) \frac{Y_1(\alpha_n) J_1\left(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}\right)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \right] \quad \text{----- (4.18)}$$

但し、 $\alpha_n$  は  $J_1(x) = 0$  の第  $n$  番目の正根であり、又

$$\begin{aligned} & \frac{\pi R_0 R_1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(\alpha_n) J_1\left(\alpha_n \frac{R_1}{R_0}\right)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \\ r \geq R_1 \text{ の時} &= \frac{R_1^2}{R_0^2} \frac{R_0^2 - R_1^2 - 2r^2}{8K} + \frac{R_1^2}{4K} + \frac{R_1^2}{2K} \log \frac{r}{R_0} \\ r \leq R_1 \text{ の時} &= \frac{R_1^2}{R_0^2} \frac{R_0^2 - R_1^2 - 2r^2}{8K} + \frac{r^2}{4K} + \frac{R_1^2}{2K} \log \frac{R_1}{R_0} \end{aligned} \quad \text{----- (4.19)}$$

$\omega_0 = 0$  とし、初期温度分布が (4.18) 式と同一形態をとるものと  
すれば (4.15) 式と同様、

$$\theta_0 = S(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\alpha_n, T) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \quad \text{----- (4.20)}$$

かゝる  $\theta_0$  の平均化に於ける温度分布は

$$\theta = S(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\alpha_n, T) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \varepsilon^{-\frac{K \alpha_n^2}{R_0^2} t} \quad \text{----- (4.21)}$$

以上を総合して、発熱層の巾及び発熱密度が段階的に変化する場合を検討する。\$t=0\$ に於ける初期温度分布が被加熱体全域に亘って、即ち \$r\$ に無関係に \$\theta\_{00}\$ なる被加熱体に先づ時刻 \$T\_1\$ まで \$R\_0-R\_{11}\$ 層に発熱密度毎秒 \$\omega\_1\$ を以て加熱し、時刻 \$T\_1\$ より時刻 \$T\_2\$ の間は、\$R\_0-R\_{12}\$ 層に \$\omega\_2\$ を以て、時刻 \$T\_2\$ より \$T\_3\$

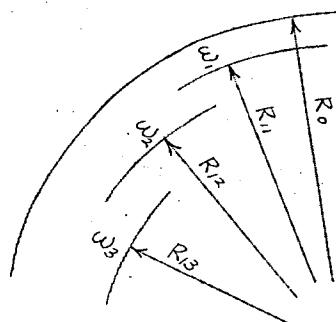


Fig. 4-3

の間は \$R\_0-R\_{13}\$ 層に \$\omega\_3\$ を以て加熱するとすれば (Fig. 4-3) ----- \$t\$ が \$0 \sim T\_1\$ 間については (4.14) 式より

$$0 \leq t \leq T_1 \quad \theta = \theta_{00} + S_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n1} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{D_n}}\right) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n1} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{D_n}}\right) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right)$$

次に \$t\$ が \$T\_1 \sim T\_2\$ の間については (4.15) 式 (4.17) 式より

$$T_1 \leq t \leq T_2 \quad \theta = \theta_{00} + S_1 T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n1} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{T_1}{D_n}}\right) \varepsilon^{-\frac{t-T_1}{D_n}} J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n1} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{T_1}{D_n}}\right) \varepsilon^{-\frac{t-T_1}{D_n}} Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) + S_2 (t - T_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n2} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t-T_1}{D_n}}\right) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n2} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t-T_1}{D_n}}\right) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right)$$

同様に \$T\_2 \sim T\_3\$ 間について計算すると

$$T_2 \leq t \leq T_3 \quad \theta = \theta_{00} + S_1 T_1 + S_2 (T_2 - T_1) + S_3 (t - T_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\phi_{n1} \varepsilon^{-\frac{t}{D_n}} + \{\phi_{n1} - \phi_{n2}\} \varepsilon^{-\frac{t-T_1}{D_n}} + \{\phi_{n2} - \phi_{n3}\} \varepsilon^{-\frac{t-T_2}{D_n}} + \phi_{n3} \right] J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \quad (92)$$



$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_{n1} \bar{\varepsilon}^{-\frac{t}{Dn}} + \{\varphi_{n1} - \varphi_{n2}\} \bar{\varepsilon}^{-\frac{t-T_1}{Dn}} + \{\varphi_{n2} - \varphi_{n3}\} \bar{\varepsilon}^{-\frac{t-T_2}{Dn}} + \varphi_{n3} \right\} Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) \quad \text{----- (4.22)}$$

但し.

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \frac{R_0^2 - R_{1m}^2}{R_0^2 - R_2^2} \\ \phi_{nm} &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \frac{\pi R_0 R_{1m}}{K} \frac{\left\{ J_1\left(\alpha_n \frac{R_{1m}}{R_0}\right) Y_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) - Y_1\left(\alpha_n \frac{R_{1m}}{R_0}\right) J_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) \right\} Y_1(\alpha_n)}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}} \\ \varphi_{nm} &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \frac{\pi R_0 R_{1m}}{K} \frac{\left\{ J_1\left(\alpha_n \frac{R_{1m}}{R_0}\right) Y_1\left(\alpha_n \frac{R_{1m}}{R_0}\right) Y_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) J_1\left(\alpha_n \frac{R_2}{R_0}\right) \right\} J_1(\alpha_n)}{\alpha_n^2 \left\{ F_1(\alpha_n) + \frac{R_2}{R_0} F_2(\alpha_n) \right\}} \\ D_n &= \frac{R_0^2}{K \alpha_n^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \phi_{nm} \\ \varphi_{nm} \end{aligned}} \right\} (4.23)$$

無空円柱の場合には、 $R_2 = 0$  として.

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \left( 1 - \frac{R_{1m}^2}{R_0^2} \right) \\ \phi_{nm} &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \frac{\pi R_0 R_{1m}}{K} \frac{Y_1(\alpha_n) J_1\left(\alpha_n \frac{R_{1m}}{R_0}\right)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} \\ \varphi_{nm} &= 0 \\ D_n &= \frac{R_0^2}{K \alpha_n^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \phi_{nm} \\ \varphi_{nm} \end{aligned}} \right\} (4.23)$$

## 4.2 平板材の加熱

Fig. 4-4に示す如き厚さが  $a$  なる無限に広がる平板に於て、その一面に表面より  $\Delta$  なる層に単位体積当り毎秒  $\omega_0$  の発熱源が存在するとする。円柱の場合と同様に発熱層及び非発熱層の

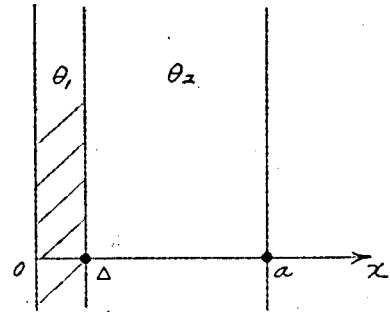


Fig. 4-4

初期温度を夫々  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$  とし演算子化された温度函数を夫々  $(H)_1$ ,  $(H)_2$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(H)_1}{dx^2} - \frac{P}{K}(H)_1 &= -\frac{\omega_0}{\lambda} - \frac{P}{K}\theta_{10} \\ \frac{d^2(H)_2}{dx^2} - \frac{P}{K}(H)_2 &= -\frac{P}{K}\theta_{20} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.24)$$

(4.24) 式に於て

$$\left. \begin{aligned} x=0 \quad \text{に於て} \quad \frac{d(H)_1}{dx} &= 0 \\ x=a \quad \frac{d(H)_2}{dx} &= 0 \\ x=\Delta \quad \frac{d(H)_1}{dx} = \frac{d(H)_2}{dx}, \quad (H)_1 &= (H)_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.25)$$

なる境界条件を用いて解くと

$$\begin{aligned} (H)_1 = \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{K}{P} \left\{ 1 - \frac{\sinh(a'-\Delta')}{\sinh a'} \cosh x' \right\} + \sqrt{\frac{P}{K}} \left\{ \left\{ \int_0^{\Delta'} \theta_{10} \cosh x' dx \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Delta'}^a \theta_{20} \cosh x' dx \right\} \cdot \frac{\cosh(a'-x')}{\sinh a'} + \int_x^{\Delta'} \theta_{10}(\xi) \sinh(x'-\xi') d\xi \right. \\ \left. + \int_{\Delta'}^a \theta_{20}(\xi) \sinh(x'-\xi') d\xi \right\} \dots\dots\dots(4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H)_2 = \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{K}{P} \frac{\sinh \Delta'}{\sinh a'} \cosh(a'-x') + \sqrt{\frac{P}{K}} \left\{ \left\{ \int_0^{\Delta'} \theta_{10} \cosh x' dx + \int_{\Delta'}^a \theta_{20} \cosh x' dx \right\} \right. \\ \left. \times \frac{\cosh(a'-x')}{\sinh a'} + \int_x^a \theta_{20}(\xi) \sinh(x'-\xi') d\xi \right\} \dots\dots\dots(4.27) \end{aligned}$$

(4.26) 式 (4.27) 式に於て  $x' = \sqrt{\frac{P}{K}} x$ ,  $a' = \sqrt{\frac{P}{K}} a$ ,  $\Delta' = \sqrt{\frac{P}{K}} \Delta$ ,

$\xi' = \sqrt{\frac{P}{K}} \xi$  であり、 $\theta_{10}(\xi)$  は  $\theta_{10}(x)$  の変数置換を行ったものである。

先づ  $\theta_{10}=0$ ,  $\theta_{20}=0$  として加熱に於ける温度分布を求めると、発熱層及非発熱層の温度分布  $\theta_1, \theta_2$  は共に次の  $\theta$  で表わされる。

$$\theta = \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{\Delta}{a} t + \frac{2a^2}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi \frac{\Delta}{a} \cos n\pi \frac{x}{a}}{n^3 \pi^3} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{a^2} t} \right) \right] \quad (4.28)$$

(4.28) 式に於て

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi \frac{\Delta}{a} \cos n\pi \frac{x}{a}}{n^3 \pi^3} \\ 0 \leq x \leq \Delta \text{ の時} &= \frac{a-\Delta}{a} \left\{ \frac{\Delta(2a-\Delta)}{6K} - \frac{x^2}{2K} \right\} \\ \Delta \leq x \leq a \text{ の時} &= \frac{\Delta}{a} \left\{ \frac{(a-x)^2}{2K} - \frac{(a+\Delta)(a-\Delta)}{6K} \right\} \end{aligned} \quad \text{----- (4.29)}$$

次に  $t=T$  に於て加熱を中止し、その右の平均化に於ける温度分布は、(4.28) 式より  $\theta_0, \theta_{20}$  は  $\theta_0$  で示されるから、

$$\textcircled{H} = \sqrt{\frac{P}{K}} \left[ \int_0^a \theta_0 \cosh x' dx' \cdot \frac{\cosh(a'-x')}{\sinh a'} + \int_x^a \theta_0(\xi) \sinh(x'-\xi') d\xi \right] \quad (4.30)$$

$\theta_0$  を (4.28) 式の如き結果として、

$$\theta_0 = \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{\Delta}{a} T + \frac{2a^2}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi \frac{\Delta}{a} \cos n\pi \frac{x}{a}}{n^3 \pi^3} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{a^2} T} \right) \right] \quad \text{----- (4.31)}$$

とすれば、(4.30) 式の  $\textcircled{H}$  を (4.31) 式に従って逆変換を施すと、

$$\theta = \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{\Delta}{a} T + \frac{2a^2}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi \frac{\Delta}{a} \cos n\pi \frac{x}{a}}{n^3 \pi^3} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{a^2} T} \right) \varepsilon^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{a^2} t} \right] \quad (4.32)$$

発熱層の巾及び発熱密度が段階的に変化する場合、  
 $t=0$  に於ける温度分布を被加熱体全体に亘って  $\theta_{00}$  (一定) とし、時刻  $T_1$  まで  $\Delta_1$  層に  $\omega_1$ 、時刻  $T_1 \sim T_2$  の間は  $\Delta_2$  層に  $\omega_2$ 、時刻  $T_2 \sim T_3$  の間  $\Delta_3$  層内に  $\omega_3$  の発熱源を以て加

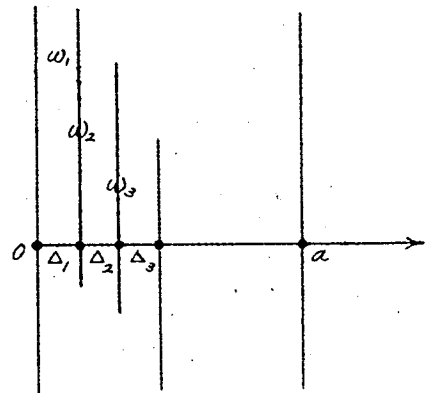


Fig. 4-5

熱する場合、 $T_2 \leq t \leq T_3$  に於ける温度分布は次の如くなる。

$$\begin{aligned} \theta = & \theta_{00} + S_1 T_1 + S_2 (T_2 - T_1) + S_3 (t - T_2) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\phi_{n1} \varepsilon^{-\frac{t}{D_n}} + \{\phi_{n1} - \phi_{n2}\} \varepsilon^{-\frac{t-T_1}{D_n}} + \{\phi_{n2} - \phi_{n3}\} \varepsilon^{-\frac{t-T_2}{D_n}} + \phi_{n3} \right] \cos n\pi \frac{x}{a} \end{aligned}$$

----- (4.33)

時刻  $T_3$  にて加熱を中止したとすれば、その後の平均化は、

$$\begin{aligned} \theta = & \theta_{00} + S_1 T_1 + S_2 (T_2 - T_1) + S_3 (T_3 - T_2) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\phi_{n1} \varepsilon^{-\frac{T_3}{D_n}} + (\phi_{n1} - \phi_{n2}) \varepsilon^{-\frac{T_3-T_1}{D_n}} + (\phi_{n2} - \phi_{n3}) \varepsilon^{-\frac{T_3-T_2}{D_n}} + \phi_{n3} \right] \varepsilon^{-\frac{t-T_3}{D_n}} \cos n\pi \frac{x}{a} \end{aligned}$$

----- (4.34)

但し、

$$\left. \begin{aligned} S_m &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \frac{\Delta m}{a} \\ \phi_{nm} &= \frac{\omega_m}{\sigma C} \frac{2a^2}{K} \frac{\sin n\pi \frac{\Delta m}{a}}{n^3 \pi^3} \\ D_n &= \frac{a^2}{n^2 \pi^2 K} \end{aligned} \right\} \text{----- (4.35)}$$

無限に広がる平板を両表面より加熱する場合は、板の厚さを  $2a$  とすれば、その一面より板の中央までの熱伝導について (4.24) 式 ~ (4.35) 式がそのまま適用出来る。而して他の一面については全く対称的な温度分布となるので、一面について知れば充分である。

平板の厚さが無限大の場合には、座標を Fig. 4-6 に示す如くとり、(4.26) (4.27) 式に於て  $a \rightarrow \infty$  とすれば、初期温度を  $\theta_{10} = 0$ ,  $\theta_{20} = 0$  として加熱に於ける温度分布は、

$$\left. \begin{aligned} (H)_1 &= \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{K}{P} (1 - \varepsilon^{-\Delta'} \cosh x') \\ (H)_2 &= \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{K}{P} \varepsilon^{-x'} \sinh \Delta' \end{aligned} \right\} \text{----- (4.36)}$$

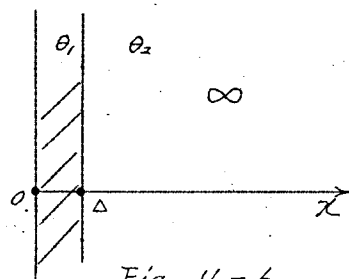


Fig. 4-6

(4.36)式を書き更めると

$$\Theta_1 = \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{K}{2} \left\{ \frac{1}{P} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{\Delta-X}{\sqrt{K}} \sqrt{P}} \right) + \frac{1}{P} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{\Delta+X}{\sqrt{K}} \sqrt{P}} \right) \right\} \quad \text{----- (4.37)}$$

$$\Theta_2 = \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{K}{2} \left\{ -\frac{1}{P} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{\Delta-X}{\sqrt{K}} \sqrt{P}} \right) + \frac{1}{P} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{\Delta+X}{\sqrt{K}} \sqrt{P}} \right) \right\}$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{\omega_0}{\sigma C} \left\{ \frac{t}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta+X}{2\sqrt{Kt}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta-X}{2\sqrt{Kt}} \right) \right\} - \frac{(\Delta+X)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta+X}{2\sqrt{Kt}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\Delta-X)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta-X}{2\sqrt{Kt}} \right) + \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi K}} \left\{ (\Delta+X) \varepsilon^{-\frac{(\Delta+X)^2}{4Kt}} + (\Delta-X) \varepsilon^{-\frac{(\Delta-X)^2}{4Kt}} \right\} \right\} \\ \Theta_2 &= \frac{\omega_0}{\sigma C} \left\{ \frac{t}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{X+\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{X-\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) \right\} - \frac{(X+\Delta)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{X+\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(X-\Delta)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{X-\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) + \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi K}} \left\{ (X+\Delta) \varepsilon^{-\frac{(X+\Delta)^2}{4Kt}} - (X-\Delta) \varepsilon^{-\frac{(X-\Delta)^2}{4Kt}} \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

(4.38)式に於て

$$\frac{(\Delta+X)^2}{4Kt} < a.1 \quad \text{----- (4.39)}$$

なる場合には次の近似が出来る。

$$\operatorname{erf} \left( \frac{\Delta+X}{2\sqrt{Kt}} \right) \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta+X}{2\sqrt{Kt}} \quad \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta-X}{2\sqrt{Kt}} \right) \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta-X}{2\sqrt{Kt}}$$

$$\operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta+X}{2\sqrt{Kt}} \right) \doteq 1 \quad \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta-X}{2\sqrt{Kt}} \right) \doteq 1$$

$$\varepsilon^{-\frac{(\Delta+X)^2}{4Kt}} \doteq 1 \quad \varepsilon^{-\frac{(\Delta-X)^2}{4Kt}} \doteq 1$$

故に、これらの近似が成立する $X$ 及 $t$ の範囲については、

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{\omega_0}{\sigma C} \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \frac{X^2 + \Delta^2}{2K} \right) \\ \Theta_2 &= \frac{\omega_0}{\sigma C} \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \frac{\Delta X}{K} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4.40)}$$

次に前記無限厚の平板の一面が  $\omega_0$  を以て  $\tau$  時間加熱された後の平均化について検討するに、初期温度条件式  $\theta_0$ ,  $\theta_{20}$  の選択について (4.40) 式を用いる事は出来ない。何故ならば (4.40) 式は表面近傍の温度分布の近似であって、一見して明かな如く  $\tau \rightarrow \infty$  の時  $\theta_{20} \rightarrow -\infty$  の如く現実と全く異った様相を呈する。斯様に (4.40) 式を初期

温度条件式として採用するには煩雑な手数を要する。従ってこゝで別途の方法により平均化の温度分布式を求める。

被加熱体内の一真ん中に於ける温度が (4.38) 式で表現される課程を辿って  $\tau$  時間加熱されたとして、その

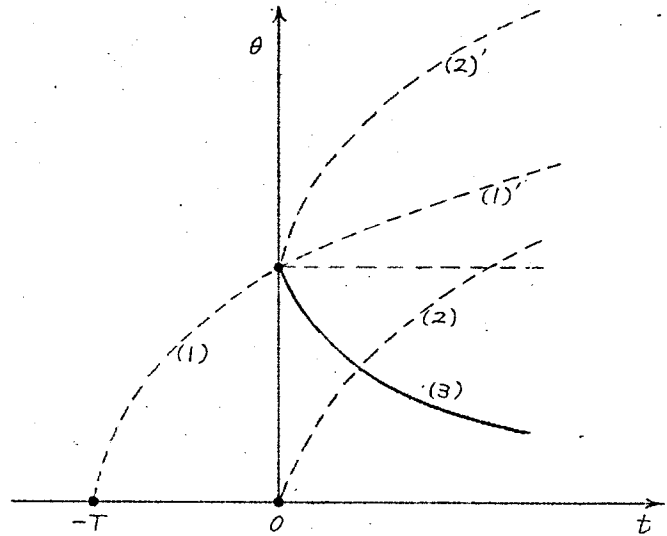


Fig. 4-7.

時間 — 温度曲線が Fig. 4-7 に示される曲線 (1) で表わされるとする。  $t=0$  に於て瞬間的に加熱を中断し、更めて同一加熱条件で加熱を継続したとすると温度は曲線 (1)' の如く上昇するが被加熱体の温度分布は加熱によるものと平均化によるものと分離出来、これが重ね合せられたものであるから、曲線 (1)' で示される温度は  $t=0$  より更めて加熱されるとした温度曲線 (2) で示される温度と、曲線 (1) で加熱されたものが  $t=0$  で加熱停止した平均化の温度曲線 (3) で示される温度との和である。従って曲線 (3) で示される平均化の温度分布は (4.38) 式により次の如く表わす事が出来る。

$$\begin{aligned}
\theta_1 = & \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{T+t}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta+x}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta-x}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) \right\} - \frac{(\Delta+x)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta+x}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) \right. \\
& - \frac{(\Delta-x)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta-x}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) + \frac{\sqrt{T+t}}{2\sqrt{\pi K}} \left\{ (\Delta+x) \mathcal{E}^{-\frac{(\Delta+x)^2}{4K(T+t)}} + (\Delta-x) \mathcal{E}^{-\frac{(\Delta-x)^2}{4K(T+t)}} \right\} \\
& - \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{t}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta+x}{2\sqrt{Kt}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta-x}{2\sqrt{Kt}} \right) \right\} - \frac{(\Delta+x)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta+x}{2\sqrt{Kt}} \right) \right. \\
& - \frac{(\Delta-x)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta-x}{2\sqrt{Kt}} \right) + \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi K}} \left\{ (\Delta+x) \mathcal{E}^{-\frac{(\Delta+x)^2}{4Kt}} + (\Delta-x) \mathcal{E}^{-\frac{(\Delta-x)^2}{4Kt}} \right\} \left. \right] \\
& \text{-----} (4.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2 = & \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{T+t}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{x+\Delta}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-\Delta}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) \right\} - \frac{(x+\Delta)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{x+\Delta}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) \right. \\
& + \frac{(x-\Delta)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{x-\Delta}{2\sqrt{K(T+t)}} \right) + \frac{\sqrt{T+t}}{2\sqrt{\pi K}} \left\{ (x+\Delta) \mathcal{E}^{-\frac{(x+\Delta)^2}{4K(T+t)}} - (x-\Delta) \mathcal{E}^{-\frac{(x-\Delta)^2}{4K(T+t)}} \right\} \\
& - \frac{\omega_0}{\sigma c} \left[ \frac{t}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{x+\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) \right\} - \frac{(x+\Delta)^2}{4Kt} \operatorname{erfc} \left( \frac{x+\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) \right. \\
& + \frac{(x-\Delta)^2}{4K} \operatorname{erfc} \left( \frac{x-\Delta}{2\sqrt{Kt}} \right) + \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi K}} \left\{ (x+\Delta) \mathcal{E}^{-\frac{(x+\Delta)^2}{4Kt}} - (x-\Delta) \mathcal{E}^{-\frac{(x-\Delta)^2}{4Kt}} \right\} \left. \right] \\
& \text{-----} (4.42)
\end{aligned}$$

故に (4.39) 式に係る近似が成立する範囲では、初期温度条件式を次の (4.43) 式の如くとり

$$\left. \begin{aligned}
\theta_{10} &= \frac{\omega_0}{\sigma c} \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{T} - \frac{x^2 + \Delta^2}{2K} \right) \\
\theta_{20} &= \frac{\omega_0}{\sigma c} \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{T} - \frac{\Delta x}{K} \right)
\end{aligned} \right\} \text{-----} (4.43)$$

平均化の温度分布式は、

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_1 = \theta_2 \\
&= \frac{\omega_0}{\sigma c} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} (\sqrt{T+t} - \sqrt{t}) \text{-----} (4.44)
\end{aligned}$$

(4.44) 式に於て、

$$t \geq T \quad \text{-----} \quad (4.45)$$

になると

$$\theta \doteq \frac{\omega_0}{\sigma C} \frac{\Delta}{\sqrt{\pi K}} \frac{T}{\sqrt{t}} \quad \text{-----} \quad (4.46)$$

単位表面積当りの入力  $W_0 = \omega_0 \Delta$  であるから

$$\theta = \frac{W_0 T}{\sigma C \sqrt{\pi K}} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{-----} \quad (4.47)$$

加熱条件である  $\omega_0$  及  $\Delta$  が階段的に変化する場合には、加熱に関しては (4.38) 式、平均化に対しては (4.41), (4.42) 式、或は適宜それらの近似式を利用して加熱及平均化の温度分布を夫々について独立に計算し、その結果を加え合はせれば良く、(4.22) 式或は (4.33) (4.34) 式と同一手法により算出出来る。

#### 4.3 高周波焼入に於ける加熱

高周波焼入に關係する誘導加熱の熱伝導として、前節に於ては中空円筒、無空円柱、平板等を対称とせる熱伝導について大観したが、これらを高周波焼入に於ける加熱に適用する場合、被加熱材を次の如く単純化して考察を進めた方が有利である。

- i. 高周波焼入の目的とする表面硬化層が被焼入材の寸法に比して薄い場合は、加熱による熱影響が必要硬化層の比較的近傍に止り、然らざる場合は加熱の熱影響が被焼入材全体に及ぶものとする。
- ii. 円筒形被焼入材はその厚さによって、円柱或は平板の加熱を以て近似せしめ、被焼入材はすべて円柱及平板を以て代表せしめる。

以上の裡 (i) 項は、被加熱体を他端面を考慮する必要のない無限厚平板に近似して取扱うか、或は円柱の中心部又は平板の他端面を考慮せるそのものとして取扱うかに帰着する。この事は一方、



加熱時間及び被加熱体の寸法に係る問題であって、温度分布式を実際に適用する場合、大別して過渡項だけを考慮すれば良いか或いは過渡項は無視してよいかになる。従って先づこれを決定する加熱時間及び被加熱体の寸法の関係から検討する。

加熱電力の密度及び深度が一定なる場合の円柱及平板の熱伝導式(4.18)式及(4.28)式は、

$$U = \theta / \frac{\omega_0}{\sigma C} \quad \text{----- (4.48)}$$

として簡易化すると、

$$\text{円柱 } U = \left(1 - \frac{R_1^2}{R_0^2}\right)t + M(r) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1n} \quad \text{----- (4.49)}$$

$$\begin{aligned} M(r) &= \frac{R_1^2}{R_0^2} \frac{R_0^2 - R_1^2 - 2r^2}{8K} + \frac{R_1^2}{4K} + \frac{R_1^2}{2K} \log \frac{r}{R_0} & r \geq R_1 \\ &= \frac{R_1^2}{R_0^2} \frac{R_0^2 - R_1^2 - 2r^2}{8K} + \frac{r^2}{4K} + \frac{R_1^2}{2K} \log \frac{R_1}{R_0} & r \leq R_1 \end{aligned}$$

$$\text{平板 } U = \frac{\Delta}{a}t + N(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n} \quad \text{----- (4.50)}$$

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{a - \Delta}{a} \left\{ \frac{\Delta(2a - \Delta)}{6K} - \frac{x^2}{2K} \right\} & x \leq \Delta \\ &= \frac{\Delta}{a} \left\{ \frac{(a - x)^2}{2K} - \frac{a^2 - \Delta^2}{6K} \right\} & x \geq \Delta \end{aligned}$$

(4.49)(4.50)式は時間 $t$ と共に消滅する過渡項 $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1n}$  或は $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n}$  を含むが時間 $t$ が大となれば $U$  は $t$ の一次式で近似される。従って $t$ を横軸、 $U$ を縦軸にとって表わせばFig. 4-8に示す如くなる。図に於て $OA_0A'_0$ ,  $OA_1A'_1$ , -----等の曲線は半径 $r = R_0, R_1, \dots$  或は $x = 0, x_1, \dots$  に対する温度を示す曲線群、 $A''_0A'_0$ ,  $A''_1A'_1$ , ----- は夫々前記曲線群の漸近線であり、これらはすべて平行直線群となる。任意半径 $r$ 或は任意深度 $x$ に於ける時間-温度の漸近線について

$$\left. \begin{aligned} OA'' &= M(r), \text{ or } N(x) \\ \tan \varphi &= \frac{\Delta}{R_0} \left( 2 - \frac{\Delta}{R_0} \right), \text{ or } \frac{\Delta}{a} \end{aligned} \right\} \dots (4.51)$$

一方円柱の中心部  
 $r=0$ , 或は平板に  
 対しては発熱面の  
 反対面  $x=a$  に  
 於ける温度曲線を  
 $OA_n A'_n$  とし、そ  
 の漸近線  $A''_n A'_n$  と  
 時間軸との交点を  
 $t_a$ , 時刻  $t_a$  に  
 於ける各位置の温  
 度函数  $u$  が  $A_0$ ,

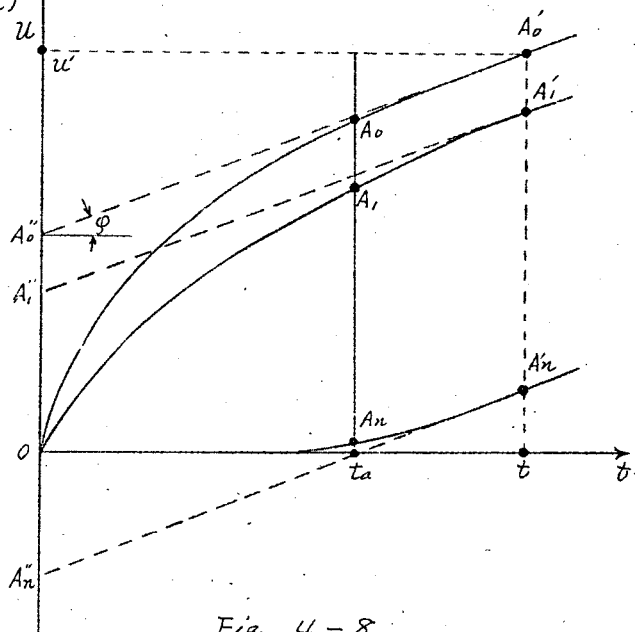


Fig. 4-8

$A_1, \dots, A_n$  であるとすれば、曲線  $OA_n A'_n$  は時刻  $t_a$  以後急速に直線  $A''_n A'_n$  に接近する。従って近似的には時刻  $t_a$  以後は温度分布に関する過渡項は実質上消滅したと見做す事が出来る。かかる意味に於ける  $t_a$  を算出するに、

$$\text{円柱} \quad \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_0^2} \right) t_a + M(0) = 0$$

$$\text{平板} \quad \frac{\Delta}{a} t_a + N(a) = 0$$

より  $t_a$  を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \text{円柱} \quad t_a &\doteq \frac{R_1^2}{8K} \quad (R_0 \doteq R_1 \text{ として}) \\ \text{平板} \quad t_a &= \frac{a^2}{6K} \left( 1 - \frac{\Delta^2}{a^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (4.52)$$

(4.52) 式の  $t_a$  は (4.49), (4.50) 式に於ける過渡項の  $\exp(-\frac{\alpha_n^2 t}{R_0^2})$  或は  $\exp(-\frac{n^2 \pi^2 K}{a^2} t)$  の指数と見合わせると、その計算上に有力な基準を与えるものでもある。

小さな電力密度  $w_0$  を以て比較的高温度まで加熱を要求される場合には、 $u$  の値が大なる事が必要となるので、そのような時には加熱時間も充分  $t_a$  より大になる事が生ずる。即ち比較的小電力で比較的寸法の小さい物も加熱する場合の温度分布式は、

$$\text{円柱} \quad u = \left(1 - \frac{R_i^2}{R_o^2}\right)t + M(r) \quad t > \frac{R_i^2}{8K} \quad \text{----- (4.49)}$$

$$\text{平板} \quad u = \frac{\Delta}{a}t + N(x) \quad t > \frac{a^2}{8K}\left(1 - \frac{\Delta^2}{a^2}\right) \quad \text{----- (4.50)}$$

で与えられ、例えば  $w_0$  及  $\theta$  が与えられて  $u$  が  $u'$  の如く決定されると、Fig. 4-8 に示す如く所要加熱時間  $t$  が求められる。又加熱時間  $t$  が与えられると  $u'$  が求まり、 $w_0$ 、 $\theta$  の一方を与えると互に他が決定出来る。更に  $t > t_a$  なる任意時刻に於ける被加熱体内の温度

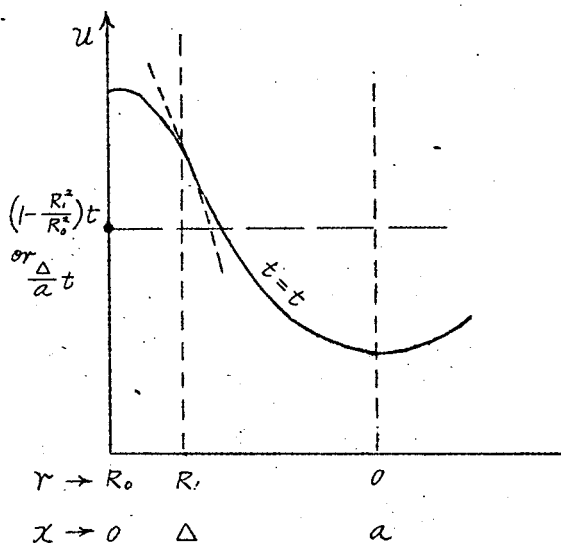


Fig. 4-9

分布は Fig. 4-9 に示す如く、発熱層、非発熱部共に略々拋物線状である。(円柱の場合は表面には拋物線でない。) 尚表面と中心の温度を夫々  $\theta_s$  及  $\theta_c$  とすると、その温度差は、

$$\text{円柱} \quad \theta_s - \theta_c = \frac{w_0}{\sigma_c} \frac{R_i^2}{2K} \log \frac{R_o}{R_i}$$

$$\doteq \frac{w_0}{2\lambda} R_i$$

$$\text{平板} \quad \theta_s - \theta_c = \frac{w_0}{2\lambda} (a - \Delta)$$

$$\left. \begin{array}{l} \doteq \frac{w_0}{2\lambda} R_i \\ \doteq \frac{w_0}{2\lambda} (a - \Delta) \end{array} \right\} \text{----- (4.53)}$$

(4.53) 式に於て  $W_0 = \omega_0 \Delta$  であり、表面と中心の温度差は単位表面積当りの入力が大きいの程、被加熱体の寸法が大なる程、又熱伝導率は小さい程、大となる事が分る。

加熱電力が大で、短時間に表面附近が所要温度に到達するような場合には、熱影響は電力深度附近の局部に限定される事が容易に推定され、Fig. 4-8 についてこれをみれば、 $t < t_a$  なる範囲の現象となる。

円柱の外径  $R_0$  或は平板の厚さ  $a$  が非常に大きい時には (4.40) 式が近似的に適用出来るが、然らざる場合についてはその適用について一考せねばならない。(4.40) 式は  $u$  を用いて表わすと、

$$u_1 = \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \frac{x^2 + \Delta^2}{2K}$$

$$u_2 = \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \frac{\Delta x}{K}$$

これらの関係は Fig. 4-10 に示す如く、拋物線で表わされ、その焦点の座標は発熱層については  $(\frac{\Delta^2}{\pi K}, -\frac{x^2 + \Delta^2}{2K})$ ；非発熱部に対するものは  $(\frac{\Delta^2}{\pi K}, -\frac{\Delta x}{K})$  である。一方、被加熱体が円柱の場合には大略、 $\Delta > 0.25 R_1$  なる関係がないとその表面温度曲線

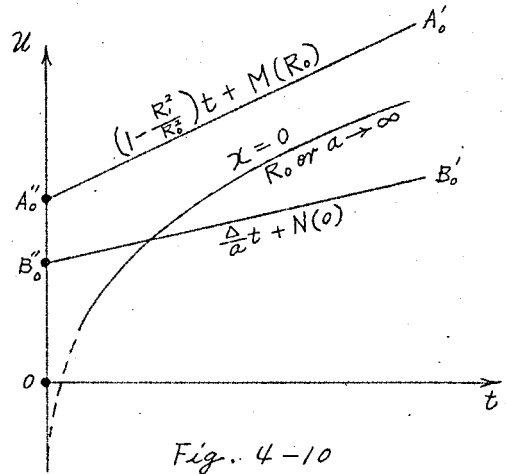


Fig. 4-10

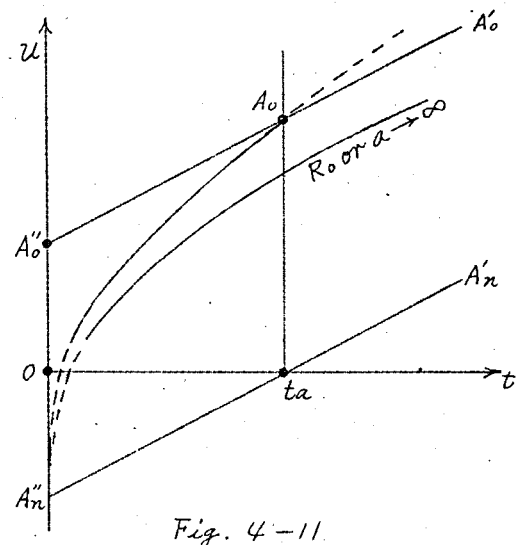


Fig. 4-11

の漸近線  $A'' A'$  と前記拋物線との交点は実在しない。被加熱体が平板の場合にはその表面温度曲線の漸近線  $B'' B'$  はすべて無限厚平板の表面温度曲線である前記拋物線と交点を持つが、交点を生ずる時刻は先の過渡項が消滅する時刻  $t_a$  よりも大である。

茲で  $t < t_a$  であって、その熱伝導式の過渡項を無視出来ない場合の表面層附近の時間—温度曲線につき、円柱の曲率、或は平板の厚み等を加味せる修正を施す為 *Fig. 4-11* に示す如く、この曲線が被加熱体の表面温度の漸近線  $A'' A'$  に於ける時刻  $t_a$  の値  $A_0$  と、無限厚平板の表面温度曲線である拋物線の頂点  $(0, -\frac{\Delta^2}{2K})$  を通る拋物線で表わされると仮定し、若干の修正を加えると、円柱及平板を短時間加熱する際の発熱層附近の温度分布式として次式を得る。

$$\text{円柱} \quad \begin{cases} u_1 = \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} + \frac{\Delta^2}{R\sqrt{K}} \right) \sqrt{t} - \frac{x^2 + \Delta^2}{2K} \\ u_2 = \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} + \frac{\Delta^2}{R\sqrt{K}} \right) \sqrt{t} - \frac{\Delta x}{K} \end{cases} \quad t < \frac{R_1^2}{8K} \quad \text{-----} (4.54)$$

$$\text{平板} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{a^2} \right) \sqrt{t} - \frac{x^2 + \Delta^2}{2K} \\ u_2 = \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{a^2} \right) \sqrt{t} - \frac{\Delta x}{K} \end{cases} \quad t < \frac{a^2}{8K} \left( 1 - \frac{\Delta^2}{a^2} \right) \quad \text{-----} (4.55)$$

高周波焼入の實際上に適用出来る場合が多い以上の温度分布式について  $\Delta^2/R\sqrt{K}$  或は  $\Delta^2/a^2$  が十分に小さいとして検討すると、

- i. 発熱層内では表面を頂点とする拋物線状に温度は下降し、非発熱部では直線的に減少する。而して非発熱部に於ける温度勾配は、

$$\frac{w_0 \Delta}{\sigma c K} = \frac{W_0}{\lambda} \quad \text{-----} (4.56)$$

であるから、単位表面積当りの入力が大きい程温度勾配は大となる。

- ii 表面と発熱、非発熱部の境界 ( $x = \Delta$ ) の温度差は  $\frac{1}{2} \frac{W_0}{\lambda} \Delta$

となるので、単位表面積当りの入力が大きいの程、又電力の滲透深度の大なる程、この温度差は大きい。

iii 焼入硬化層が電力深度より大なる如き加熱（一般にこの場合が多い）に於て、表面温度及び非発熱部の温度勾配を一定とし

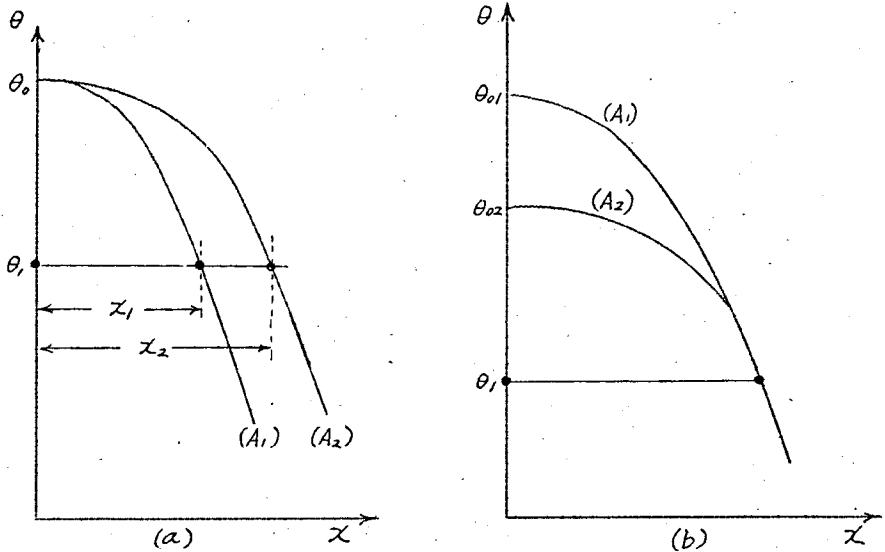


Fig. 4-12

て、異なる周波数即ち異なる電力深度を以て加熱する場合の焼入硬化層の差を検討するに、例えば Fig. 4-12(a)に於て  $\Delta_1$  なる電力深度で加熱する時の温度分布曲線を  $A_1$ 、 $\Delta_2$  で加熱する時のそれを  $A_2$  とし、表面温度  $\theta_0$  を同一として  $\theta_1$  以上の温度の部分が焼入硬化されるものとする、非発熱部に於ける温度勾配が同一なる為には単位表面積当りの入力電力  $W_0$  が両者に於て等しい事が必要であるから、各焼入硬化層  $x_1$ 、 $x_2$  の差は次の如くなる。

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) \quad \text{----- (4.57)}$$

焼入硬化層の差は電力深度の差の半分である事が分る。

又かくの如く表面温度及び非発熱部の温度勾配を同一とする事

を條件に、異なる周波数で加熱を行う場合、その加熱時間の差を検討するに、例えば Fig. 4-12(a) に於て  $A_1$  なる温度分布を生ぜしむる周波数による加熱時間を  $T_1$ 、 $A_2$  なる温度分布を生ぜしむる周波数による加熱時間を  $T_2$  とすれば

$$\sqrt{T_2} = \sqrt{T_1} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{K}} (\Delta_2 - \Delta_1) \quad \text{----- (4.58)}$$

iv 異なる周波数を用いて加熱する場合を比較するのに、焼入硬化層を同一とし更に非発熱部の温度勾配を同一とする条件を付けると、例えば Fig. 4-12(b) に示すように周波数  $f_1$  を用いて加熱する時の温度分布を  $A_1$ 、周波数  $f_2$  を以ってする時のそれを  $A_2$  とし、 $\theta_1$  以上の温度部分が焼入硬化されたとすると、各場合の表面温度  $\theta_{01}$  及  $\theta_{02}$  の差は、

$$\theta_{01} - \theta_{02} = \frac{W_0}{\lambda} \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \quad \text{----- (4.59)}$$

この差は単位表面積当り入力  $W_0$  によっては相当大きな値となるので、焼入実施上には表面の過熱、熔融等をもたらす事になり、表面温度を同一にせる時の焼入硬化層の差は (4.57) 式に示される如く小であっても、同一硬化層を得る為には表面温度に相当大なる差が発生する事になる。

高周波焼入の加熱課程に於ては第1章で詳述した如く、加熱電力密度及び電力の滲透深度が大巾に変化する。かゝる場合に対応する正確な計算式は (4.22) 式或は (4.33) (4.34) 式で既に与えられて居るが、茲ではその実用的な面より再検討を加える。

先づ加熱式に於ける過渡項を考慮する必要のない場合から考察を進めるに、ある一定な電力密度  $\omega_0$  を基準として、最初時刻  $T_1$  まで  $n_1 \omega_0$ 、次に時刻  $T_2$  まで  $n_2 \omega_0$ 、----- の如く加熱し、各加熱時に於ける発熱層の厚さを夫々  $(R_0 - R_{11})$ 、 $(R_0 - R_{12})$ 、----- とする。各加熱時間  $(T_1 - 0)$ 、 $(T_2 - T_1)$ 、----- が過渡項を無視するに足る充分の大きさであれば、その時間 — 温度の関係は Fig. 4-13 に

示すような屈折線  $A_0, A_1, A_2, \dots$  の如くなり、これを数式で表わせば、例えば  $M(\gamma, R_{1g})$  が (4.19) 式で与えられるとして、

$$T_1 \geq t > 0$$

$$u_1 = n_1 \left(1 - \frac{R_{11}^2}{R_0^2}\right) t + n_1 M(\gamma, R_{11})$$

$$T_2 \geq t > T_1$$

$$u_2 = n_1 \left(1 - \frac{R_{11}^2}{R_0^2}\right) T_1 + n_2 \left(1 - \frac{R_{12}^2}{R_0^2}\right) (t - T_1) + n_2 M(\gamma, R_{12})$$

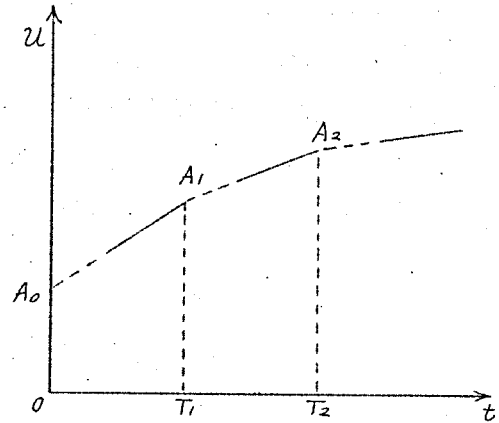


Fig. 4-13

この事は (4-22) 式よりも明らかであるが、次の如くも考えられる。即ち、 $T_2 \geq t > T_1$  に於ては、 $t = T_1$  の温度分布  $(u_1)_{T_1} = n_1 \left(1 - \frac{R_{11}^2}{R_0^2}\right) T_1 + n_1 M(\gamma, R_{11})$  の平均化と、 $n_2 \omega_0$  による加熱とを併せ考えなければならぬが、平均化の過渡項は加熱に於ける過渡項と同様な課程で消失するので、 $R_{11} \doteq R_{12}$  であれば、これらの消失時刻も略々同じになる。かくして同様な手法を繰返す事により、

$T_g \geq t > T_{g-1}$  に於ては、

$$u_g = n_1 \left(1 - \frac{R_{11}^2}{R_0^2}\right) T_1 + n_2 \left(1 - \frac{R_{12}^2}{R_0^2}\right) (T_2 - T_1) + \dots + n_g \left(1 - \frac{R_{1g}^2}{R_0^2}\right) (t - T_{g-1}) + n_g M(\gamma, R_{1g}) \quad \text{----- (4.60)}$$

被加熱体が平板の時も全く同様に、

$$u_g = n_1 \frac{\Delta_1}{a} T_1 + n_2 \frac{\Delta_2}{a} (T_2 - T_1) + \dots + n_g \frac{\Delta_g}{a} (t - T_{g-1}) + n_g N(x, \Delta_g) \quad \text{----- (4.61)}$$

(4.60), (4.61) 式より注意すべきは、被加熱体内に於ける温度分布、例えば表面と中心の温度等は最終の加熱条件の  $M(\gamma, R_{1g})$



或は  $N(x, \Delta q)$  によって決定される事である。高周波焼入の加熱の一般的傾向は、 $n_1 > n_2 > \dots > n_g$  であるが、このような場合には表面と中心の温度差が次第に少くなる事が分る。

次に加熱時間が被加熱体の寸法に比して短時間であって、その温度分布式が (4.40) 式で与えられる場合、前の直線式の時と同様、一定電力密度  $\omega_0$  及び電力深度  $\Delta$  を基準にして、最初時刻  $T_1$  まで  $n_1 \omega_0, \frac{\Delta}{m_1}$  なる夫々密度及び深度で加熱し、次に時刻  $T_2$  まで  $n_2 \omega_0, \frac{\Delta}{m_2}$  で、-----時刻  $T_g$  まで  $n_g \omega_0, \frac{\Delta}{m_g}$  で加熱するとすると、 $R_{1g}$  或は  $a$  が充分大きい場合には、

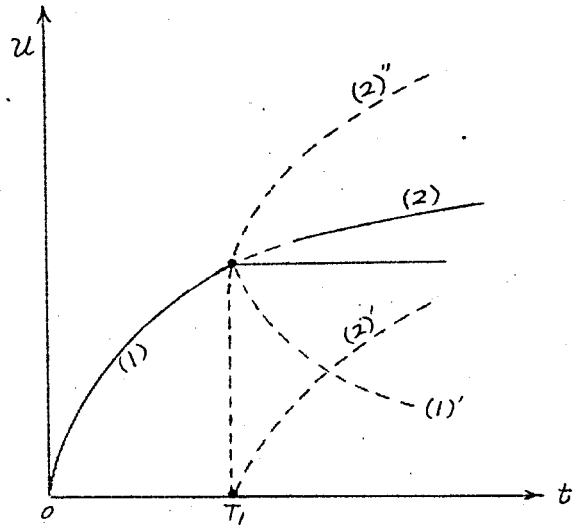


Fig. 4-14

$$T_1 \leq t < T_2$$

$$U_{11} = \frac{n_1}{m_1} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \frac{n_1(x^2 + \frac{\Delta^2}{m_1^2})}{2K} \quad x \leq \frac{\Delta}{m_1}$$

$$U_{12} = \frac{n_1}{m_1} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \frac{n_1}{m_1} \frac{\Delta x}{K} \quad x \geq \frac{\Delta}{m_1}$$

$T_2 \leq t < T_g$  なる時間に於ては、電力の密度及び深度が夫々  $n_2 \omega_0, \frac{\Delta}{m_2}$  を以て加熱される温度分布と、 $U_{11}, U_{12}$  の加熱停止に伴う平均化の温度分布を重ね合わせたものが実際の温度分布を示す訳であるが、(4.44) 式を導いたと全く同様に、これを求める事が出来る。即ち、Fig. 4-14 に於て、曲線 (1) を  $U_{11}$  を加熱曲線とし、曲線 (1') をその平均化曲線、 $n_2 \omega_0, \frac{\Delta}{m_2}$  による加熱曲線を (2)' とすれば、実際の加熱曲線 (2) は (1)' と (2)' の表わす温度の和と

なる。故に、

$\frac{\frac{\Delta}{m_2} + x}{2\sqrt{K(t-T_1)}}$  が充分小さい範囲の  $x$  及  $(t-T_1)$  に対しては、(1)' については (4.44) 式、(2)' に対しては (4.40) 式を利用する事により、

$$T_2 \geq t > T_1$$

$$\begin{aligned} u_{21} &= \frac{n_1}{m_1} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} (\sqrt{t} - \sqrt{t-T_1}) + \left\{ \frac{n_2^2}{m_2^2} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t-T_1} - \frac{n_2(x^2 + \frac{\Delta^2}{m_2^2})}{2K} \right\} \\ &= \frac{n_1}{m_1} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t-T_1} - \frac{n_2(x^2 + \frac{\Delta^2}{m_2^2})}{2K} \dots x \leq \frac{\Delta}{m_2} \end{aligned}$$

$$u_{22} = \frac{n_1}{m_1} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t-T_1} - \frac{n_2}{m_2} \frac{\Delta x}{K} \dots x \geq \frac{\Delta}{m_2}$$

同様な手順により  $T_g \geq t > T_{g-1}$  に対しては、

$$\begin{aligned} u_{g1} &= \frac{n_1}{m_1} \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} - \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t-T_1} - \left( \frac{n_2}{m_2} - \frac{n_3}{m_3} \right) \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t-T_2} - \dots \\ &\quad - \left( \frac{n_{g-1}}{m_{g-1}} - \frac{n_g}{m_g} \right) \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t-T_{g-1}} - \frac{n_g(x^2 + \frac{\Delta^2}{m_g^2})}{2K} \end{aligned}$$

$T_{g-1} < t$  であるから、 $\sqrt{t-T_{g-1}} \doteq \sqrt{t} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{T_{g-1}}{t} \right)$  とすると、

$$\begin{aligned} u_{g1} \doteq \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} \left\{ \frac{n_g}{m_g} + \frac{1}{2t} \left\{ \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) T_1 + \left( \frac{n_2}{m_2} - \frac{n_3}{m_3} \right) T_2 + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{n_{g-1}}{m_{g-1}} - \frac{n_g}{m_g} \right) T_{g-1} \right\} \right\} - \frac{n_g(x^2 + \frac{\Delta^2}{m_g^2})}{2K} \dots (4.62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{g2} \doteq \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} \left\{ \frac{n_g}{m_g} + \frac{1}{2t} \left\{ \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) T_1 + \left( \frac{n_2}{m_2} - \frac{n_3}{m_3} \right) T_2 + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{n_{g-1}}{m_{g-1}} - \frac{n_g}{m_g} \right) T_{g-1} \right\} \right\} - \frac{n_g}{m_g} \frac{\Delta x}{K} \dots (4.62) \end{aligned}$$

被加熱体が例えば円柱の場合、その曲率を考慮に入れると (4.54) 式より、(4.62) 式に相当するものとして

$$\begin{aligned}
 U_{q1} = & \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{t} \left\{ \frac{n_q}{m_q} + \frac{1}{2t} \left\{ \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) T_1 + \dots + \left( \frac{n_{q-1}}{m_{q-1}} - \frac{n_q}{m_q} \right) T_{q-1} \right\} \right. \\
 & + \frac{\Delta^2}{\sqrt{K}} \sqrt{t} \left\{ \frac{1}{R_{1q}} \frac{n_q}{m_q^2} + \frac{1}{2t} \left\{ \left( \frac{1}{R_{11}} \frac{n_1}{m_1^2} - \frac{1}{R_{12}} \frac{n_2}{m_2^2} \right) T_1 + \dots \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( \frac{1}{R_{1,q-1}} \frac{n_{q-1}}{m_{q-1}^2} - \frac{1}{R_{1q}} \frac{n_q}{m_q^2} \right) T_{q-1} \right\} \right\} - \frac{n_q (x^2 + \frac{\Delta^2}{m_q^2})}{2K}
 \end{aligned}$$

(4.62)式に於ける  $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots$  等は第1章に示せる如く、使用周波数、加熱コイル、被加熱体の温度分布等で支配されるが、基準としての電力の浸透深度  $\Delta$  を  $\delta_0/2$  に採ると、焼入硬化層が  $\delta_0/2$  以上になるような場合には全加熱時間  $t$  に比して  $T_1, T_2$  等の加熱の初期に於ける区分時間は非常に短いので、温度分布は略々最終的な加熱条件（この時の電力密度を  $\omega_0$  とすれば）  $\frac{\delta_0}{2}$  と  $\omega_0$  によって定まる事になる。

尚高周波焼入は大別して定置焼入法と移動連続焼入法に二分される。而して定置焼入法に於ける加熱の温度分布は前記に従ってその時間-温度特性は Fig. 4-15 に示す如く拋物線類似曲線となるが、移動焼入法に於ては被

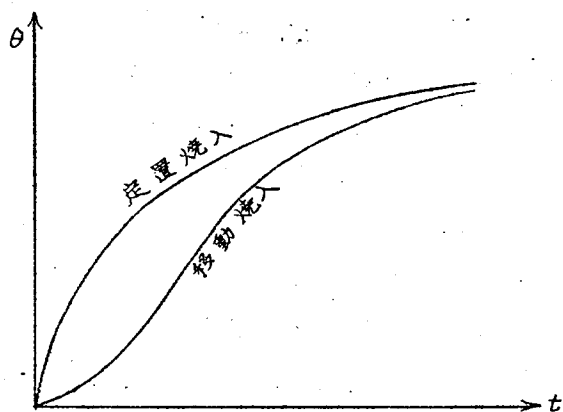


Fig. 4-15

焼入体が加熱コイルの内に入る以前に既に加熱コイルの磁束の影響と被加熱部より軸方向の熱伝導を受ける為、温度上昇曲線は当初に於て Fig. 4-15 の移動焼入曲線に示す如き緩慢な上昇の傾向を有する。しかし乍ら時間的には加熱コイル内に於ける加熱時間に比して短時間であり、熱的にも小量であるから、一般的には焼入法の如何に拘らず高周波焼入の加熱としてはその熱影響が発熱

層の近傍に止る限り、温度は略々加熱時間の平方根に比例して上昇すると考えて差支えない。

#### 4.4 結 び

本章に於ては当初に記せる如く、鋼の誘導加熱に於て被加熱体を発熱層と非発熱部に分け、更に発熱層に於ける電力密度はその位置の如何に拘らず一定とし、被加熱体の形状の代表として円柱及び平板を採った。その結果を一括すると次の如くなる。

- i. 円柱及び平板の温度分布式は発熱層、非発熱部を問わず、例えば円筒形については(4.14)式、平板については(4.28)式の如く単一式で表わされ、
- ii. 従って加熱停止後の平均化課程に於ける温度分布も(4.17)式或は(4.32)式の如き簡単な形式で表現される事を明かにし、
- iii. 更に短時間加熱の基礎となる厚さが無限大なる平板につき、加熱及び加熱停止後の平均化に於ける温度分布を解析した。
- iv. 以上を高周波焼入に於ける加熱に応用する際、温度分布式の過渡項消滅時間を被加熱体の寸法との関係に於て導入し、
- v. 加熱時間が過渡項消滅時間より長い場合には温度上昇曲線が時間について直線的であり、又被加熱体内の温度分布は略々拋物線状である事を示した。
- vi. 次に加熱時間が過渡項消滅時間より短い場合には、温度は略々時間の平方根に比例して上昇する事を示し、又被加熱体内の温度分布は発熱層に於ては拋物線状、非発熱部では直線的なる事を明かにした。
- vii. 以上を高周波焼入の実際について、発熱層の厚さが異なる場合、それが焼入硬化層の厚さに及ぼす影響、或は表面温度に及ぼす影響等について検討し、高周波焼入に於ける周波数選定上の一つの目安を与え、
- viii. 最後に高周波焼入の加熱上、必然的な加熱進行に伴う発熱層の厚さ及び電力密度の変化に対する温度分布式の取扱い、並に

その変形式を導出し、最終加熱条件がその温度分布に最も強い影響を及ぼす事を明かにした。

実際の高周波焼入に於ては加熱コイルは有限長であり、被加熱体の端部も種々多様な形状を有するので、加熱コイルの端部に於ける被加熱体の加熱部と非加熱部の境界、或は端面の温度分布は複雑であるが、これらについては加熱コイルに適宜な加工を施して対処せられなければならない。これらの部分を除いては無限長、又は無限な広がりを持つと仮定しても差支えないので、本章の温度分布式は充分な応用範囲を持つものと信ずる。

## 第5章 高周波焼入に於ける冷却

高周波焼入は一般に誘導加熱による表面加熱と、それに引続いて行われる冷却課程よりなる。而して焼入という最終目的よりすれば冷却は加熱と同様、或はそれ以上の重要な段階であるが、被冷却面と冷却液相互間の熱授受に関する現象が複雑である為、その数式的取扱いは非常に困難である。従って古来の全体加熱による焼入法に於ける冷却についても簡単な数値を目安として多くを経験に頼って居り、これを数式的に取扱う場合は被冷却面と冷却液間の熱伝達率( $\alpha$ )を一定として計算するか、或は( $\alpha$ )を無限大として被冷却面は冷却開始と同時に冷却液の温度になるものとして、冷却課程の温度分布を熱伝導率( $\lambda$ )のみによって算出する等、相当大雑把な仮定が採られている。又高周波焼入の冷却についても被焼入面と冷却液間の相対熱伝達率( $h = \alpha/\lambda$ )を一一定として、更に初期温度条件として被加熱体内の温度分布を拋物線状として解析された例はあるが、前記と同様、仮定に於ける吟味に必ずしも充分と云えない点が多く、又導出された温度分布式も実用性に乏しい。

高周波焼入は一般に表面加熱であるから、その冷却課程は古来の全体加熱に於ける冷却とは異り、従って古来の冷却に関する経験、資料をそのまま適用する事は出来ない。以上に鑑み本章に於ては加熱による温度上昇が被焼入体の表面附近に限定されている場合の冷却につき解析する。

### 5.1 冷却に関する仮定

静止せる焼入用冷却液中に加熱せる鋼材を浸漬すると、その表面部の時間-温度の冷却曲線は Fig. 5-1 に示す如く一般に3段階に区分される。この冷却曲線は冷却液の温度、沸点、蒸気圧、気化熱等々の諸性質及び鋼材表面の状態にも影響されるが、更に冷却液を攪拌或は噴射する等の強制対流の影響も大きく、例えば静止液の冷却曲線を Fig. 5-1 の I II III とする時、これを攪拌

する時には蒸気膜段階Ⅰは短縮され、沸騰段階Ⅱ及び対流段階Ⅲの勾配も若干急峻になり、ⅠⅡ'Ⅲ'の如く示される事が知られている。焼入液の冷却能として鋼材表面と焼入液間の相対熱伝達率  $h(\frac{1}{cm})$  を採ると、これらの影響は第2表に掲ぐる如くである。

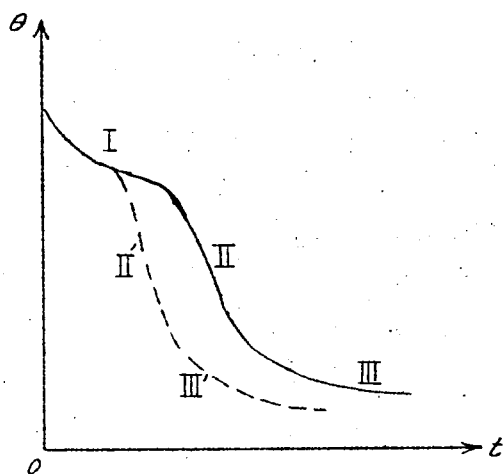


Fig. 5-1

相対熱伝

達率  $h$  は熱伝達率  $\alpha$  と熱伝

導率  $\lambda$  の比で定義されるが、この値は相当詳しく測定されて

	空 気	油	水(20°C)	食塩水
鋼材及び冷却剤が静止の場合	0.025~0.033	0.6~0.75	2.2~2.5	約 5
冷却剤は静止し、 鋼材を中程度に動かした場合	—	0.9~1.2	3~5	約 8
同上、激しく動かした場合	—	1.5~2.5	5~10	約 13
冷却液を激しく攪拌か噴射した場合	—	2.5~4	10~25	—

第 2 表

日本鉄鋼協会(鋼の熱処理と作業標準)

いるのに対し、高温度の鋼材表面と冷却液間の  $\alpha$  については測定資料が非常に乏しい。焼入液の冷却特性を相対的に知る為に銀球を冷却して或る温度範囲に於ける冷却速度を求める測定は比較的簡単な為に屢々行われるが、鋼材を用いて高温度に於ける  $\alpha$  を測定せる資料は皆無に近く、それに近いものとして石原康正氏(ト

ヨタ技報、第6巻35頁、  
昭28年)による電解鉄を  
試片とし、適当な攪拌を与  
えた測定計算結果は大略Fig.  
5-2 に示すような傾向を  
示している。

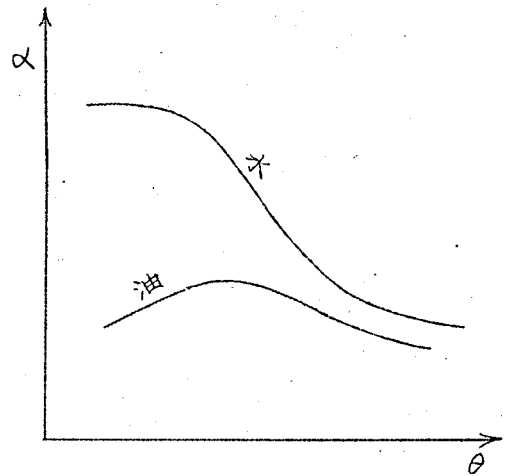


Fig 5-2.

高周波焼入に於ける冷却  
は多くの場合噴射手段を用  
い、冷却液は水或は水の類  
似液が使われる。而して噴  
射冷却の場合には前記蒸気  
膜段階は著しく短縮される

ものと考えられ、熱伝達率 $\alpha$ は対流段階の開始までは表面温度の  
下降と共に増大する。従って茲に次の如き冷却に関する計算上の  
仮定を設定する。

- i. 冷却開始より対流段階の開始までの期間に於ける冷却につい  
ては、被冷却面に於ける温度勾配を一定とする。即ち被冷却体  
内の座標の原点を冷却面にとると、

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = h\theta = \frac{Q}{\lambda} \quad \text{----- 一定}$$

但し、同式で温度 $\theta$ は冷却液の温度を基準として0にとってあ  
り、又 $Q$ は被冷却面単位表面積より毎秒奪取される熱量に相当  
する。

- ii. 対流段階開始後は相対熱伝達率 $h$ を一定とする。

## 5.2 初期に於ける冷却式

前節の仮定に従って冷却初期の温度分布は、その基本として厚  
さが無限大である平板表面より毎秒単位表面積当り $Q(\text{Cal/cm}^2 \cdot \text{S})$   
なる一定熱量が流出する場合を考えればよい。従って、Fig. 5-3  
に示すように冷却表面を座標の原点に選べば、



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{Q}{\lambda}$$

但し、 $K$ は温度伝導率、

$$K = \frac{\lambda}{\sigma \cdot c}$$

これを演算子化して解くと、

初期温度を0として、

$$(\text{H}) = -\frac{Q}{\lambda} \sqrt{\frac{K}{P}} \varepsilon^{-\sqrt{\frac{P}{K}} x} \quad \text{-----} (5.1)$$

(5.1) 式に逆変換を施すと、

$$\theta = -\frac{Q}{\lambda} \left[ 2\sqrt{\frac{K}{\pi}} \sqrt{t} \varepsilon^{-\frac{x^2}{4Kt}} + x \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \right) - x \right] \quad \text{-----} (5.2)$$

(5.2) 式に於て

$$\frac{x^2}{4Kt} \doteq 0 \quad \text{-----} (5.3)$$

なる範囲を条件として近似を行えば

$$\theta \doteq -\frac{Q}{\lambda} \left[ 2\sqrt{\frac{K}{\pi}} \sqrt{t} - x \right] \quad \text{-----} (5.4)$$

冷却初期に於ける温度分布は、加熱停止後の平均化の温度分布式と(5.2)又は(5.4)式を加え合わせて求められる。

尚、この冷却課程に於て流出熱量  $Q$  が段階的に変化する場合には前章3節に記したと全く同様に、例えば最初の  $T$  秒間の流出熱量を  $Q_1$  とし、次いで  $Q_2$  に変化したとする時には、

$$\theta = -2\sqrt{\frac{K}{\pi}} \sqrt{t} \left[ \frac{Q_2}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{T}{t} \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} \right] + \frac{Q_2}{\lambda} x \quad (5.5)$$

### 5.3 高周波焼入に於ける冷却

前節に於ける初期冷却の計算は被冷却表面温度が対流段階開始温度  $\theta_{100}$  に達する間の適用に止め、表面温度が  $\theta_{100}$  に達するま

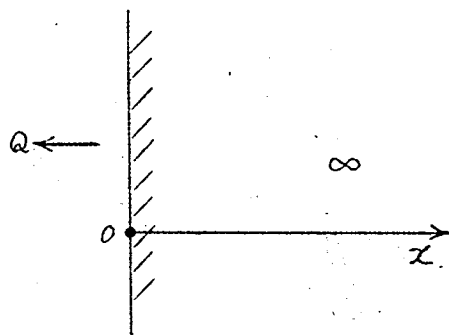


Fig. 5-3

での時間と $\tau$ とする。

一方被冷却体内の温度分布として(4.40) 式を若干修正して(同式に於ける境界面  $x=\Delta$  の温度勾配を同一とし、 $\theta_2$  は指数函数的に減少するとした。) 冷却開始の初期温度が

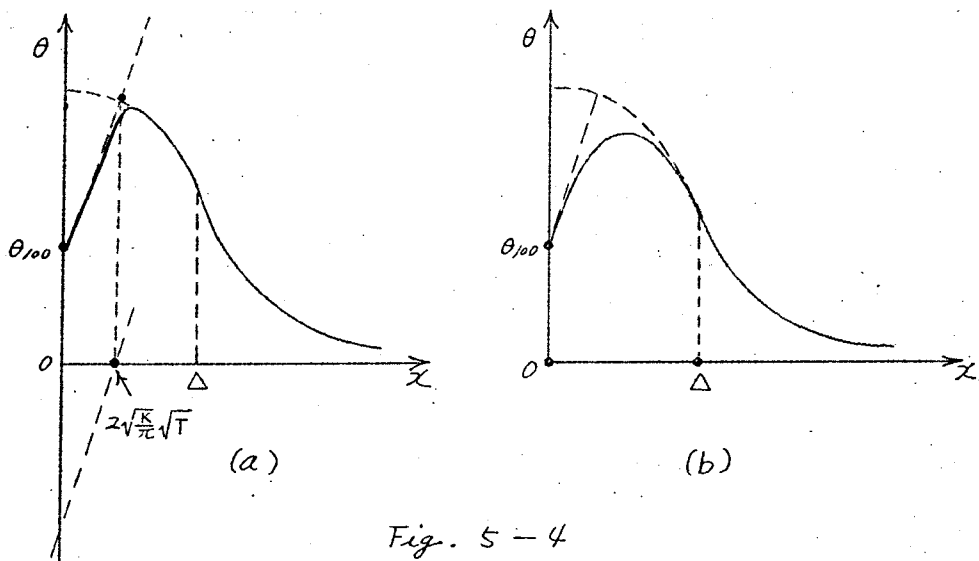


Fig. 5-4

$$\theta_0^{\circ} = \frac{\omega_0}{\sigma c} \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{T_R} - \frac{x^2 + \Delta^2}{2K} \right)$$

$$\theta_{20}^{\circ} = \frac{\omega_0}{\sigma c} \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} \sqrt{T_R} - \frac{\Delta^2}{K} \right) \varepsilon^{-\frac{x - \Delta}{2\sqrt{\frac{K}{c}}\sqrt{T_R} - \Delta}}$$

で与えられ、且前記初期冷却期間 $\tau$ が非常に短時間であってその平均化を無視出来るとすれば、対流段階開始の初期温度条件式は、例えば、(5.4) 式を採用して、 $\Delta > 2\sqrt{\frac{K}{c}}\sqrt{T}$  の場合には Fig. 5-4 (a) に示す実線のように。

$$0 \leq x \leq 2\sqrt{\frac{K}{c}}\sqrt{T} \quad \theta_{10} = \theta_{100} - \frac{\omega_0}{\lambda} \frac{x^2}{2} + \frac{Q}{\lambda} x$$

$$2\sqrt{\frac{K}{c}}\sqrt{T} \leq x \leq \Delta \quad \theta_{10}' = \theta_{10}^{\circ}$$

$$\Delta \leq x \quad \theta_{20} = \theta_{20}^{\circ}$$

の如く表わされる。T が非常に短時間の場合にはこの初期温度分布を以て運算を行えば良い訳であるが、こゝではこれを簡単化して Fig. 5-4(b) に示す如き二層区分で近似し、初期温度条件式を次式の如く表わす。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{10} &= \theta_{100} + \frac{Q}{\lambda} x - A x^2 \\ \theta_{20} &= B e^{-\frac{x-\Delta}{D}} \end{aligned} \right\} \text{----- (5.6)}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{Q}{\lambda} + \frac{\theta_{100}}{\Delta} - \frac{B}{\Delta} \right) \\ D &= \frac{B}{\frac{Q}{\lambda} + 2 \frac{\theta_{100}}{\Delta} - 2 \frac{B}{\Delta}} \end{aligned} \right\} \text{----- (5.7)}$$

演算子方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \textcircled{H}_1}{dx^2} - \frac{P}{K} \textcircled{H}_1 &= -\frac{P}{K} \theta_{10} \\ \frac{d^2 \textcircled{H}_2}{dx^2} - \frac{P}{K} \textcircled{H}_2 &= -\frac{P}{K} \theta_{20} \end{aligned} \right\} \text{----- (5.8)}$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0 \quad \text{に於て} \quad \frac{d \textcircled{H}_1}{dx} &= h \textcircled{H}_1 \\ x=\Delta \quad \text{に於て} \quad \frac{d \textcircled{H}_1}{dx} &= \frac{d \textcircled{H}_2}{dx}, \quad \textcircled{H}_1 = \textcircled{H}_2 \\ h \theta_{100} &= \frac{Q}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{----- (5.9)}$$

(5.8) 式を (5.9) 式によって解くと、

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{H}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{P/K}} \left[ e^{-x'} \int_0^x \theta_{10} e^{x'} dx + e^{x'} \int_x^\Delta \theta_{10} e^{-x'} dx + \frac{\sqrt{P-hK}}{\sqrt{P+hK}} e^{-x'} \int_0^\Delta \theta_{10} e^{x'} dx \right. \\ &\quad \left. + e^{x'} \int_\Delta^\infty \theta_{20} e^{-x'} dx + \frac{\sqrt{P-hK}}{\sqrt{P+hK}} e^{-x'} \int_\Delta^\infty \theta_{20} e^{x'} dx \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\textcircled{H}_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{K}} \left[ \mathcal{E}^{-x'} \int_0^{\Delta} \theta_{00} \mathcal{E}^{x'} dx + \frac{\sqrt{P} - h\sqrt{K}}{\sqrt{P} + h\sqrt{K}} \mathcal{E}^{-x'} \int_0^{\Delta} \theta_{00} \mathcal{E}^{-x'} dx + \mathcal{E}^{-x'} \int_{\Delta}^{\infty} \theta_{20} \mathcal{E}^{x'} dx \right. \\ \left. + \mathcal{E}^{x'} \int_x^{\infty} \theta_{20} \mathcal{E}^{-x'} dx + \frac{\sqrt{P} - h\sqrt{K}}{\sqrt{P} + h\sqrt{K}} \mathcal{E}^{-x'} \int_{\Delta}^{\infty} \theta_{20} \mathcal{E}^{-x'} dx \right] \quad (5.10)$$

但し、 $x' = \sqrt{\frac{P}{K}} x$ .

(5.10) 式に於ける  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{20}$  として (5.6) 式を採用すると

$$\textcircled{H}_1 = \theta_{00} - 2A \frac{K}{P} - \frac{B}{2} \mathcal{E}^{-(\Delta-x')} - \frac{\theta_{200}}{2} \mathcal{E}^{-x'} - \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{\lambda} - 2A\Delta \right) \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-(\Delta-x')} \\ + \frac{1}{2} \frac{Q}{\lambda} \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-x'} + AK \left[ \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-(\Delta-x')} + \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-x'} \right] \\ - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P} - h\sqrt{K}}{\sqrt{P} + h\sqrt{K}} \left[ B \mathcal{E}^{-(\Delta+x')} - \theta_{000} \mathcal{E}^{-x'} + \left( \frac{Q}{\lambda} - 2A\Delta \right) \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-(\Delta+x')} \right. \\ \left. - \frac{Q}{\lambda} \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-x'} - 2AK \left\{ \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-(\Delta+x')} - \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-x'} \right\} \right] \\ + \frac{B}{2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} + \frac{\sqrt{K}}{D}} \mathcal{E}^{-(\Delta-x')} + \frac{B}{2} \frac{\sqrt{P} - h\sqrt{K}}{\sqrt{P} + h\sqrt{K}} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} + \frac{\sqrt{K}}{D}} \mathcal{E}^{-(\Delta+x')} \\ \dots\dots\dots (5.11)$$

$$\textcircled{H}_2 = \frac{B}{2} \mathcal{E}^{-(x'-\Delta)} - \frac{\theta_{000}}{2} \mathcal{E}^{-x'} - \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{\lambda} - 2A\Delta \right) \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-(x'-\Delta)} + \frac{1}{2} \frac{Q}{\lambda} \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-x'} \\ + AK \left[ \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-x'} - \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-(x'-\Delta)} \right] + \frac{\theta_{20}}{2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} - \frac{\sqrt{K}}{D}} \left[ 1 - \mathcal{E}^{\frac{x-\Delta}{D} - (x'-\Delta')} \right] \\ - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P} - h\sqrt{K}}{\sqrt{P} + h\sqrt{K}} \left[ B \mathcal{E}^{-(x'+\Delta')} - \theta_{000} \mathcal{E}^{-x'} + \left( \frac{Q}{\lambda} - 2A\Delta \right) \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-(x'+\Delta')} \right. \\ \left. - \frac{Q}{\lambda} \sqrt{\frac{K}{P}} \mathcal{E}^{-x'} - 2AK \left\{ \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-(x'+\Delta')} - \frac{1}{P} \mathcal{E}^{-x'} \right\} \right] \\ + \frac{\theta_{20}}{2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} + \frac{\sqrt{K}}{D}} + \frac{B}{2} \frac{\sqrt{P} - h\sqrt{K}}{\sqrt{P} + h\sqrt{K}} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} + \frac{\sqrt{K}}{D}} \mathcal{E}^{-(x'+\Delta')} \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

(5.11) (5.12) 式に逆変換を施すには次の如き基本的変換式を予め作成する。

$$\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} \rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{K}{P}}\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} \rightarrow -x + 2\sqrt{\frac{Kt}{\pi}}\mathcal{E}^{-\frac{x^2}{4Kt}} + x \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)$$

$$\frac{1}{P}\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} \rightarrow t + \frac{x^2}{2K} - \left(t + \frac{x^2}{2K}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) - x\sqrt{\frac{t}{\pi K}}\mathcal{E}^{-\frac{x^2}{4Kt}}$$

$$\frac{\sqrt{P}-h\sqrt{K}}{\sqrt{P}+h\sqrt{K}}\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} \rightarrow 2\mathcal{E}^{hx+h^2Kt} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}} + h\sqrt{Kt}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{P}-h\sqrt{K}}{\sqrt{P}+h\sqrt{K}}\sqrt{\frac{K}{P}}\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} &\rightarrow \frac{2}{h}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) - \mathcal{E}^{hx+h^2Kt} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}} + h\sqrt{Kt}\right)\right] \\ &\quad + x - 2\sqrt{\frac{Kt}{\pi}}\mathcal{E}^{-\frac{x^2}{4Kt}} - x \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{P}-h\sqrt{K}}{\sqrt{P}+h\sqrt{K}}\frac{1}{P}\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} &\rightarrow \frac{2}{h^2K}\left[\mathcal{E}^{hx+h^2Kt} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}} + h\sqrt{Kt}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) - 1\right] \\ &\quad + \frac{2}{hK}\left[-x + 2\sqrt{\frac{Kt}{\pi}}\mathcal{E}^{-\frac{x^2}{4Kt}} + x \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)\right] \\ &\quad + \left(t + \frac{x^2}{2K}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) + x\sqrt{\frac{t}{\pi K}}\mathcal{E}^{-\frac{x^2}{4Kt}} - \frac{x^2}{2K} - t \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{K}} \rightarrow -\mathcal{E}^{\frac{K}{D^2}t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{Kt}}{D}\right)$$

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{K}}\mathcal{E}^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} \rightarrow \mathcal{E}^{-\frac{x}{D} + \frac{K}{D^2}t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}} - \frac{\sqrt{Kt}}{D}\right)$$

$$\frac{\sqrt{P}-h\sqrt{K}}{\sqrt{P}+h\sqrt{K}} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}+\frac{\sqrt{K}}{D}} \varepsilon^{-\sqrt{\frac{P}{K}}x} \rightarrow \frac{1}{h-\frac{1}{D}} \left[ 2h\varepsilon^{hx+h^2kt} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}+h\sqrt{kt}\right) \right. \\ \left. - \left(h+\frac{1}{D}\right)\varepsilon^{\frac{x}{D}+\frac{K}{D^2}t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}+\frac{\sqrt{kt}}{D}\right) \right. \\ \left. - \left(h-\frac{1}{D}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi kt}}\varepsilon^{-\frac{x^2}{4kt}} \right]$$

以上の変換式を用い、更に  $x$  及び  $t$  に関して

$$\frac{(\Delta \pm x)^2}{4kt} \doteq 0, \quad \frac{x^2}{4kt} \doteq 0 \quad \text{----- (5.13)}$$

なる範囲における表面附近の温度分布を求めると

$$\theta = \theta_1 = \theta_2$$

$$= \frac{B}{2} \frac{1}{h-\frac{1}{D}} \left[ 2h\varepsilon^{(x+\Delta)h+h^2kt} \operatorname{erfc}(h\sqrt{kt}) - \left(h+\frac{1}{D}\right)\varepsilon^{\frac{x+\Delta}{D}+\frac{K}{D^2}t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{kt}}{D}\right) \right. \\ \left. - \left(h-\frac{1}{D}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \right] + \frac{B}{2} \varepsilon^{-\frac{x-\Delta}{D}+\frac{K}{D^2}t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{kt}}{D}\right) \\ - \left\{ B + \frac{1}{h}\left(2A\Delta - \frac{Q}{\lambda}\right) - \frac{2A}{h^2} \right\} \varepsilon^{(x+\Delta)h+h^2kt} \operatorname{erfc}(h\sqrt{kt}) \\ - \frac{2A}{h^2} \varepsilon^{xh+h^2kt} \operatorname{erfc}(h\sqrt{kt}) \quad \text{----- (5.14)}$$

(5.14) 式に於て

$$h\sqrt{kt} \gg 1, \quad \frac{\sqrt{kt}}{D} \gg 1 \quad \text{----- (5.15)}$$

とすれば

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \left\{ \frac{B}{2} \frac{1}{h-\frac{1}{D}} \left\{ 2\varepsilon^{(x+\Delta)h} - (hD+1)\varepsilon^{\frac{x+\Delta}{D}} - \sqrt{K}\left(h-\frac{1}{D}\right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{DB}{2} \varepsilon^{-\frac{x-\Delta}{D}} - \frac{1}{h} \left\{ B + \frac{1}{h}\left(2A\Delta - \frac{Q}{\lambda}\right) - \frac{2A}{h^2} \right\} \varepsilon^{(x+\Delta)h} \right. \right.$$

$$- \frac{2A}{h^3} \varepsilon x h \Big] \quad \text{-----} (5.16)$$

又、(5.14) 式に於て

$$h\sqrt{kt} \gg 1, \quad \frac{\sqrt{kt}}{D} \doteq 0 \quad \text{-----} (5.17)$$

なる時には

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{B}{2} \varepsilon^{-\frac{x-\Delta}{D}} - \frac{B}{2} \frac{hD+1}{hD-1} \varepsilon^{\frac{x+\Delta}{D}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \left\{ \frac{B}{2} \frac{1}{h-\frac{1}{D}} \left\{ 2\varepsilon^{(x+\Delta)h} - \sqrt{K} \left( h - \frac{1}{D} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{h} \left\{ B + \frac{1}{h} \left( 2A\Delta - \frac{Q}{\lambda} \right) - \frac{2A}{h^2} \right\} \varepsilon^{(x+\Delta)h} - \frac{2A}{h^3} \varepsilon x h \right\} \end{aligned} \quad \text{-----} (5.18)$$

(5.6) 式の  $\theta_{20}$  から明かな如く

(5.15) 式の條件は  $D$  が小さい事を意味するから被冷却体の内部に於ける温度勾配が急峻な場合を意味し、(5.17) 式では反対に非常に緩かなる事を意味する。

以上の熱伝導式に於ては温度  $\theta$  の基準として冷却液の温度を 0 としている。従つて實際の温度は冷却液の温度が加算されなければならない。更に (5.6), (5.7) 式で与えられる初期温度條件式中、 $B$  は  $x = \Delta$  に於ける初期温度を示すものであるが、この  $\Delta$  及び  $B$  に関しては必ずしも加熱の熱伝導式に採用された  $\Delta$  に拘泥されず、(5.6) 式の  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$  が Fig 5-4(6) に示されるように対流放熱開始時の初期温度分布に最も近いように選定されるべきである。又初期冷却時間  $\tau$  が大なる時には勿論加熱停止後の平均化課程の温度分布が加味されなければならない。

#### 5.4 結 び

一般に焼入に於ける冷却は、冷却液の特性、攪拌の程度に大きく左右されるが、この他に被焼入体の寸法に影響される。同一の冷却液を用い、同一程度の攪拌を与えても、寸法が大になると表面附近の冷却速度が遅くなり、焼きが入り難くなるといわれている。この事は、例えば被焼入体を円柱形とした場合の温度分布式は相対熱伝達率 $h$ を一定として、次の如く与えられるから

誘導加熱の場合、初期温度  $\theta_0 = \frac{2Q_0}{\sigma CR_0} \left\{ T + \frac{r^2}{4K} - \frac{R_0^2}{8K} \right\}$  として、

$$\theta = \frac{4Q_0}{\sigma CR_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0})}{\alpha_n \{ J_0^2(\alpha_n) + J_1^2(\alpha_n) \}} \left\{ T + \frac{R_0}{8K} + \frac{R_0}{2Kh} - \frac{R_0^2}{K\alpha_n^2} \right\} e^{-\frac{\alpha_n^2 K}{R_0^2} t}$$

全体均一加熱されている場合、初期温度 $\theta_0$ を一定として

$$\theta = 2\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n \{ J_0^2(\alpha_n) + J_1^2(\alpha_n) \}} J_0(\alpha_n \frac{r}{R_0}) e^{-\frac{\alpha_n^2 K}{R_0^2} t}$$

但し、 $R_0$  は円柱の半径、 $Q_0$  及  $T$  は夫々加熱に要した表面入力及時間

$\alpha_n$  は  $\alpha J_1(\alpha) - h R_0 J_0(\alpha) = 0$  を満足する第 $n$ 番目の根。

$R_0$  の大きさによって  $\sum_{n=1}^{\infty}$  なる級数の収斂程度が定まり、 $R_0$  の大きい程収斂は遅くなり、従って温度降下も遅くなる事が推定される。被焼入体を厚さの限定された平板或は円柱形とすると、冷却に於ける熱伝導式は加熱の場合と同様に前記の如く無限級数の和の形で算出されるので、これを実際に適用せんとする時に不便な点が多い。本章に於ては前章の高周波焼入に於ける加熱の項に対応して、熱影響が表面附近に限定される場合の冷却に関する温度分布の近似式を導いたもので、対流段階開始後は略々時間の平方根に反比例して温度は下降する事を明かにした。尚冷却に関する



る仮定中、沸騰段階に於ては奪取される熱量を一定としたが、これが一定としての取扱いが困難な場合は冷却初期の温度分布式として(5.4)式の代りに(5.5)式を採用すればよい。



## 第6章 実施例

本章は第4章の高周波焼入に於ける加熱に対する補足的な実験例を示すもので、被焼入材の加熱停止直前の表面温度及び加熱だけを考慮せる焼入深度についての実験並に計算を例示する。被焼入材は円柱形とし、焼入は定置焼入<sup>わ</sup>と移動焼入の二方法を取り、電力密度に於て前者は前者の約2倍となるようにした。

尚、前記加熱だけを考慮せる焼入深度とはこの場合、高周波焼入された鋼断面を稀硝酸で腐蝕した時に現<sup>わ</sup>れる反応の深度を基準とした。

### (1) 実験例 (A) 定置焼入

a. 試験片;  $40.5\text{ mm}\phi \times 100\text{ mm}\ell$ : S50C 材

加熱コイル;  $44\text{ mm}\phi \times 20\text{ mm}\ell$  1回巻

b. 焼入装置; 真空管自動発振器 (9771 使用)

発振周波数; 約 170 KC

c. 焼入条件

但し冷却は水の噴射冷却

試料 No	陽極 電圧 $E_p$	陽極 電流 $I_p$	格子 電流 $I_g$	加熱時間	表面温度	焼入深度
A1	12 KV	6 → 5 <sup>A</sup>	0.7 → 0.83 <sup>A</sup>	3.3 <sup>sec</sup>	約 900℃	2.1 mm
A2	12	6 → 5	0.7 → 0.83	5.1	約 1,000	3 ~ 3.1
A3	12	6 → 5	0.7 → 0.83	7.0	約 1,050	4.5

この表の  $I_p$  には  $I_g$  が重畳されて居り、眞の陽極電流はこの表の  $I_p - I_g$  である。

※ 3 表

d. 正味加熱電力; 10 kW

正味加熱電力 ( $2\pi R_0 W_0$ ) は次の如く、魔法瓶に被加熱体を投入するカロリー法により求めた。即ち被焼入材を前記條件に於て最初2秒、次に3秒、次に5秒加熱して被焼入材に吸収された熱量を求めた所 (各3回迄の平均値)

加熱時間	2 sec	吸収熱量	10.28 KCal
" "	3 sec	" "	12.7 KCal
" "	5 sec	" "	17.4 KCal

而して2秒以後は  $I_p$ ;  $I_g$  共に大体夫々  $5$ ;  $0.83 A$  に落付いていた。故に最初の2秒間の平均電力は約  $21.6 kW$  (~~38~~  $38\%$ ) であるがその後に於ける電力は約  $10 kW$  である。この値は焼入装置の能率  $\eta$  が約  $20\%$  で悪いが、これは加熱コイルに対して電流変成器が適當でない事を意味する。

e. 焼入深度、 $\phi 3$  表に併載したが、その断面は次の Fig. 6-1 (a) ~ (c) の如し。

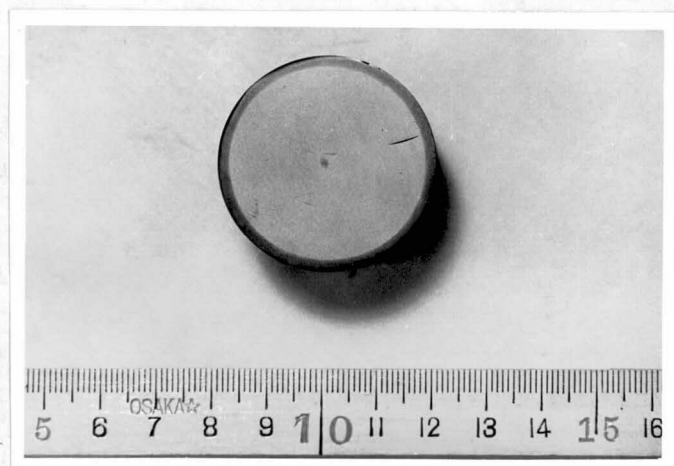


Fig. 6-1 (a) 試料断面写真 No A<sub>1</sub>

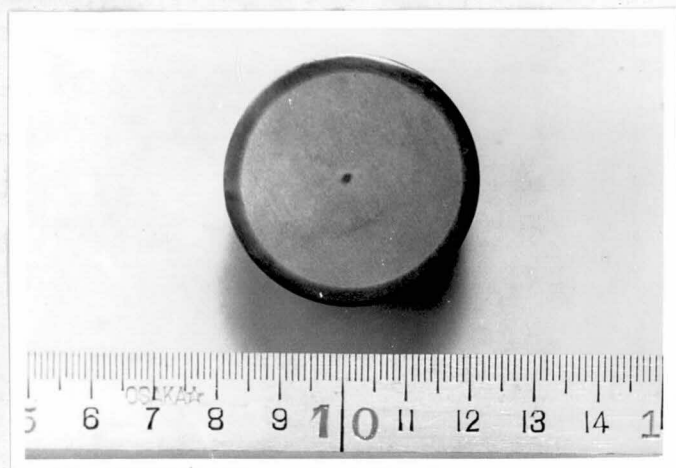


Fig 6-1 (b) 試料断面写真 No A2



Fig 6-1 (c) 試料断面写真 No A3

(ii) 実験例 [A] に対する計算値

a. 定数値

炭素鋼に於ては炭素量及その処理方法によつて熱伝導率 $\kappa$ 、  
比熱  $C$ 、密度 $\rho$ は常温に於ても若干異なるが、温度によつて相

当に変化する。その大体の値は常温から 700 °C 迄について

$$\begin{array}{lll} \lambda \text{ (Cal / cm} \cdot \text{C} \cdot \text{S)} & 0.12 & \text{---} \quad 0.07 \\ C \text{ (Cal / g} \cdot \text{C)} & 0.12 & \text{---} \quad 0.2 \\ \rho \text{ (Cal / cm}^3 \text{)} & 7.8 & \text{---} \quad 7.6 \end{array}$$

(金属便覧・日本金属学会編)

従つて温度伝導率  $K$  も 次の如く変化する。

$$K \text{ (cm}^2 \text{/sec)} \quad 0.15 \text{ --- } 0.05$$

本計算に於てはこれを一一定してゐるので、これらを一応次の如く定める。

$$\rho = 7.8$$

$$C = 0.15 \quad (\text{単位は前掲と同じ})$$

$$\lambda = 0.1 \quad K = 0.0855$$

以上は大体 400 °C ~ 500 °C に対する値である。

#### b. 計 算 値

$$\text{周 波 数} \quad f = 170 \text{ KC}$$

$$\therefore \text{電 流 深 度} \quad \delta_0 = 0.134 \text{ cm}$$

$$\text{電 力 深 度} \quad \Delta = 0.067 \text{ cm}$$

$$R_0 = 2.025 \text{ cm}$$

$$R_1 = 1.958 \text{ cm}$$

故に (4.52) 式の  $t_a$  は

$$t_a = \frac{R_1^2}{8K} = 5.6 \text{ sec}$$

従つて No. A3 に於ける加熱時間 7 秒はこれよりも大きい。大差ないのですべてを (4.54) 式

$$\theta_1 = \frac{w_0}{\sigma C} \left\{ \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} + \frac{\Delta^2}{R_1 \sqrt{K}} \right) \sqrt{t} - \frac{x^2 + \Delta^2}{2K} \right\}$$

$$\theta_2 = \frac{w_0}{\sigma C} \left\{ \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} + \frac{\Delta^2}{R_1 \sqrt{K}} \right) \sqrt{t} - \frac{\Delta x}{K} \right\}$$

により計算する。

前記実験より  $2\pi R_0 w_0 = 10 \text{ KW}$  なる故

単位表面積当り電力  $W_0 = 786 \text{ W/cm}^2$

$$\begin{aligned}\text{電力密度 } W_0 &= \frac{W_0}{\Delta} = 11720 \text{ W/cm}^3 \\ &= 2800 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{sec}\end{aligned}$$

以上の数値を用いると

$$1) \text{ 表面温度 } \theta_{01} = \frac{W_0}{\sigma C} \left\{ \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} + \frac{\Delta^2}{R_1 \sqrt{K}} \right) \sqrt{t} - \frac{\Delta^2}{2K} \right\}$$

試料  $A_1$  について  $\theta_{01} = 1090^\circ \text{C}$

$A_2$  "  $\theta_{01} = 1380^\circ \text{C}$

$A_3$  "  $\theta_{01} = 1620^\circ \text{C}$

2) 焼入深度については、 $800^\circ \text{C}$ 以上の部分が焼入される  
として

$$\chi = \frac{K}{\Delta} \left\{ \left( \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi K}} - \frac{\Delta^2}{R_1 \sqrt{K}} \right) \sqrt{t} - \frac{800^\circ \text{C}}{W_0} \right\}$$

試料  $A_1$  について  $\chi = 0.19 \text{ cm}$   $\frac{\Delta + \chi}{2\sqrt{Kt}} = 0.241$

$A_2$  "  $\chi = 0.34 \text{ cm}$   $= 0.308$

$A_3$  "  $\chi = 0.47 \text{ cm}$   $= 0.348$

### (vii) 実験例 (B) ----- 移動焼入

a. 試験片;  $30 \text{ mm} \phi \times 100 \text{ mm} \ell$  S 55 C 材

加熱コイル;  $35 \text{ mm} \phi \times 10 \text{ mm} \ell$  1回巻

b. 焼入装置; 真空管式自励発振器 (9T71 使用)

発振周波数; 約  $170 \text{ KC}$  ----- (A) と同一装置

c. 焼入条件 表4の如し

d. 正味加熱電力

(A) の場合と同様にカロリーー法により測定

$B_1$  に対しては  $16.1 \text{ kW}$

$B_2$  "  $16.4$

$B_3$  "  $19.0$

$B_4$  "  $17.8$

但し冷却は加熱コイル直下にて水噴射

試料 No	陽極 電流 Ep	陽極 電流 Ip	格子 電流 Ig	移動速度 mm/sec	停止換算 加熱時間 SEC	表面 温度	焼入 深度
B <sub>1</sub>	11.9 <sup>KV</sup>	5.2 <sup>A</sup>	0.36 <sup>A</sup>	13.3	(0.752)	約 900°C	0.9 <sup>mm</sup>
B <sub>2</sub>	11.5	5.5	0.40	12.5	(0.8)	" 950	1.2
B <sub>3</sub>	12.2	6.0	0.45	10.1	(0.99)	" 1000	1.7
B <sub>4</sub>	12.1	5.7	0.46	8.3	(1.205)	" 1050	2.0

真の陽極電流 =  $I_p - I_g$  (※3表と同じ)

※ 4 表

e. 焼入深度 ※4表に併載したが、その奥断面は次の Fig-6-2 (a) ~ (d) の如し。



Fig 6-2 (a) 試料断面写真 No B<sub>1</sub>





Fig 6-2 (b) 試料断面写真 No B2



Fig 6-2 (c) 試料断面写真 No B3



Fig 6-2 (d) 試料断面写真 No B<sub>4</sub>

(IV) 実験例 (B) に対する計算値

a. 定数値; [A] の場合と同一

b. 計算値

$$\text{周 波 数 } f = 170 \text{ KC}$$

$$\text{電 力 深 度 } \Delta = 0.067 \text{ cm}$$

$$R_0 = 1.5 \text{ cm}$$

$$R_1 = 1.433 \text{ cm}$$

$$\tau a = \frac{R_1^2}{8K} = 3 \text{ sec}$$

前例と同じく (4.54) 式を使用する。

d. の正弦加熱電力より電力密度  $W_0$  は

試料 No	$W_0 (\text{KW/cm}^2)$	$W_0 (\text{W/cm}^2)$	$W_0 (\text{cal/cm}^2 \text{ sec})$
B <sub>1</sub>	1.71	25500	6080
B <sub>2</sub>	1.74	26000	6180
B <sub>3</sub>	2.02	30100	7150
B <sub>4</sub>	1.89	28200	6710

以上の数値を用ゐると

1) 表面温度----- (ii) の計算式と同じ

試料 $B_1$ について	$\theta_{01} = 1080^{\circ}\text{C}$
$B_2$ "	$\theta_{01} = 1130^{\circ}\text{C}$
$B_3$ "	$\theta_{01} = 1480^{\circ}\text{C}$
$B_4$ "	$\theta_{01} = 1550^{\circ}\text{C}$

2) 焼入深度----- (ii) と同じく  $800^{\circ}\text{C}$  以上の部分が焼入  
されるとき (ii) と同一計算式を用ゐると

試料 $B_1$ について	$x = 0.1 \text{ cm}$	$\frac{x + \Delta}{2\sqrt{KE}} = 0.33$
$B_2$ "	$x = 0.11 \text{ cm}$	$= 0.345$
$B_3$ "	$x = 0.18 \text{ cm}$	$= 0.416$
$B_4$ "	$x = 0.2 \text{ cm}$	$= 0.416$

(V) 実測値と計算値に対する考察

以上の計算によると、焼入深度については実測値に比較的近い計算値を示したが、表面温度については大巾な差が現れ、特に電力密度及び加熱時間が大きくなる程この差が大きくなった。これらの事を検討するに

1.  $\rho$ ,  $C$ ,  $\lambda$ ,  $K$ , 等は温度に影響される事、前掲の如くであるが、計算式は一定として導出されたものである。従つて本計算に使用された定数値が必ずしも妥当であるかどうか疑問がある。

2. 従つて、例えば表面温度  $\theta_{01}$  の算式に於て表面部分は相当高温なる事を考慮して、比熱  $C$  を  $0.2$  とすると、(本計算では  $0.15$  とした)  $\theta_{01}$  は次の如く実測値に近づく。

	$C = 0.2$	$C = 0.15$ の時	実 測 値
$A_1$	$820^{\circ}\text{C}$	$1090^{\circ}\text{C}$	約 $900^{\circ}\text{C}$
$A_2$	$1030$	$1380$	" $1000$
$A_3$	$1215$	$1620$	" $1050$
$B_1$	$810$	$1080$	" $900$
$B_2$	$850$	$1130$	" $950$

$B_3$	1110	1480	約 1000
$B_4$	1160	1550	・ 7050

3. 計算に於ては  $w_0$  及び  $\Delta$  を一定として居るが、実際には大巾に変化するもので、この加熱初期の電力の影響は無視されてゐる。(これは当初初期電力の影響を無視して算出された  $\lambda$  が  $\Delta$  に比して相当大きかつた隠であるが。)

4. 計算式は近似式であつて、本計算に於ては近似の範囲、

$$\frac{(\lambda + \Delta)^2}{4 K \tau} < 0.1 \quad \text{を若干逸脱してゐるものがある。}$$

5. 実際に於ては、定置焼入れの場合は試験片が加熱コイルより非常に長いので軸方向に熱伝導による損失がある。

又、移動焼入れに於ては加熱コイル通過後冷却されるまで時間に若干平均化の傾向があるべきであるが、これらはすべて計算上無視してゐる。

6. 表面よりの輻射損失は加熱電力に比して非常に小さいので無視した。

7. 加熱中に於ける変態潜熱も同様に無視されてゐる。

8. 本計算値は基準温度として室温を0としてゐるから、真の温度は計算上の温度にこの場合約  $20^\circ\text{C}$  加えたものである。

## 結 言

高周波焼入の歴史は緒言でも触れたやうに相当に古いが、高周波焼入を施された鋼製品の冶金的、機械的性格が漸次明かにされ、その特長が広く認識されて従来、単に滲炭焼入の安価なる代用という考えを脱皮してそれ独自の応用分野が開拓され始めたのは比較的最近の事である。かかる趨勢は高周波焼入条件にも当然単なる表皮硬化と異なる厳密性が要求される事になるが、従来この種の表現として発電機出力何kW、何秒加熱、或は真空管発振器の直流入力何kW、移動速度何mm/sec程度のもので、発熱密度及発熱域に厳密に触れたものは皆無である。誘導加熱に於ては加熱コイル、電流変成器、その他の回路条件により入力に対する正味の加熱出力は大きく変化するので、前記のやうな表現は非常に非現実的と謂はねばならないし、又一般性に乏しい事になる。これを翻せば従来高周波焼入は経験に対する依拠性が強く、これを裏付ける実地的な理論に乏しかった事を示すものである。

以上に鑑み、本研究に於ては高周波焼入に於ける熱源とそれに伴う熱伝導に關する統一的な理論付けを行つたもので、これを要約すると、第1章～第3章については、

- i. 発熱層は加熱進行に伴ひ増加するが、磁気変態層が電流の滲透深度  $\delta_0$  の  $1/2$  以上になると、 $\delta_0/2$  をどう大きく超える事はなく。
- ii. 発熱密度は加熱コイルの印加電圧が一定であれば、加熱進行と共に減少し、磁気変態層が前記  $\delta_0$  を超えた範囲では概ね一定となる。
- iii. 加熱コイル電圧は電流変成器の使用、或は高周波電源の種類等によつて変化の度合が異なるが、高周波焼入に於ける電流変成器の考え方及び電源として高周波発電機、真空管自動発振器の代表的二例について第2、3章に詳述した。

オム章 ～ オム章については

Ⅳ、熱伝導に係る温度分布式を系統立て、

Ⅴ、高周波焼入に適用する実用的近似式を導出し、これが適用範囲を加熱時間及び被加熱体の寸法の関係に於て設定し、

Ⅵ、加熱に於ける温度分布は、加熱末期の最終的加熱条件に強く支配される事を示し、

Ⅶ、加熱及び冷却の温度は夫々 $\sqrt{t}$  及び  $1/\sqrt{t}$  に概略比例する事を明かにした。

Ⅷ、最後に実施例により、定数値の選定に注意すればこれらの算式は実用的に充分有用なる事を実証した。

最後に、本研究に対して終始懇切なる御鞭撻を賜った林重憲教授に対し深甚なる感謝の意を表します。又、本研究の遂行に対して公私の別なく御援助戴きました有賀社長、藤田専務をはじめとする高周波熱練株式会社各位、応用科学研究所山崎部長他の皆様方に厚く感謝の意を表して摘筆する。

## 参 考 文 献

1. 谷崎義一：高周波焼入装置      日立評論    27.   199    (昭19)
2. 鳥養利三郎 } 衝撃高周波焼入 (1)    電気評論    33.     3.    (昭20)  
岩本國三 } 法
- 
- "                (2)          "                34    4.5    (昭21)
- "                (3)          "                34    6.7    (昭21)
- "                (4)          "                35    1.2    (昭22)
3. 輻射科学研究会第5部会：高周波加熱とその応用  

電気書院    (昭28)
4. 甘利省吾：無線送信機      産業図書    (昭29)
5. 北村寛一：誘導加熱の研究(其の1)    電気試験所研究報告  

563    (昭32)

  
"        "        (其の2)        "        "  

588    (昭35)
6. H. Brown 他：Theory and Application of Radio-Frequency Heating.      D. Van Nostrand Co. (1947)
7. Electronic Engineers of the Westinghouse Electric Corp.: Industrial Electronics Reference Book. John Wiley & Sons, Inc. (1948)
8. N. R. Stansel : Induction Heating. Mc Graw Hill Book Co. (1949)
9. L. A. Dreyfus : High Frequency Heating and Temperature Distribution in Surface Heating of Steel. (1952)
10. R. M. Baker : Design and Calculation of Induction Heating Coils.    A. I. E. E. Transactions 76 Mar. (1957)

11. R.M. Baker ; *Classical Heat Flow Problems Applied to Induction Billet Heating*. A. I. E. E. Transactions 77 May (1958)
12. Kurt Kegel : *Hochfrequenzgeneratoren für induktive Erwärmung*. Elektrotechnische Zeitschrift 79. 13 (1958)
13. 林 重憲 : 演算子法と過渡現象 国民科学社 (昭24)
14. 藤本武助 } : 伝熱学概論 共立出版 (昭31)  
佐藤 俊 }
15. 中野義映 : 高周波誘導加熱における熱伝導計算式  
電気学会誌 78. 768 (昭33)
16. 西村秀雄 他 : 高周波表面焼入に関する研究  
山崎惣三郎  
水曜会誌 13. 335 (昭32)
17. 石原康正 : 急冷せる物体の温度及び長さの変化に就て  
トヨタ技術 6. 35 (昭28)
18. 斎藤大吉 : 金属材料及其加工法 (炭素鋼篇)  
九 善 (昭17)